

UNIVERSIDADE TIRADENTES

**JOSÉ ADRIANO DOS SANTOS
JOSIEL LIMA SANTOS
LUÍZA FERNANDA FERREIRA FERNANDES**

**RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 2º;
3º E 4º GRAU**

Propriá
2007

**JOSÉ ADRIANO DOS SANTOS
JOSIEL LIMA SANTOS
LUÍZA FERNANDA FERREIRA FERNANDES**

**RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DE 2º,
3º E 4º GRAU**

Trabalho apresentado à Universidade Tiradentes como um dos pré-requisitos à aprovação na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso

ORIENTADOR:
Profº. ANDRÉ LUIZ NOGUEIRA

Propriá
2007

Aos nossos pais, com muito amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças:

A Deus, dono da sabedoria e do poder.

A Universidade Tiradentes por ter nos dado todo o suporte para a realização deste trabalho.

A todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente.

A todos os colegas de trabalho.

Aos nossos professores: José Vieira, Carla Alessandra e Marcos Paulo por terem nos incentivado desde o início ao final do curso.

Ao professor André Luiz Nogueira, nosso orientador, pois se não fosse ele, não seria possível a realização do mesmo.

Ao professor Alex Sandro, por ter indicado o tema deste trabalho.

A todos os nossos familiares, por estarem presente nas horas difíceis, nos incentivando e nos dando força.

Não há ramo da matemática, por mais abstrata que seja, que não possa, um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lochevsky

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos resoluções de equações polinomiais de 2º, 3º e 4º graus. Onde no primeiro capítulo mostraremos o contexto histórico e os primeiros métodos de resolução de equação de 2º grau, utilizados pelos Babilônicos, Gregos, Hindus, Árabes, Chineses e Europeus, comparando com o método atual e mostrando a contribuição que esses povos tiveram com a matemática que serviu como referência para que outros matemáticos encontrassem fórmulas que facilitassem encontrar a solução de equações destes tipos.

No segundo capítulo, mostraremos uma maneira simples de encontrar pelo menos uma raiz de polinômio de grau maior ou igual a 3, sem precisar está atribuindo valores a equação dada, bastando apenas identificar quando é uma equação Recíproca de primeira ou segunda ordem, que de imediato vai nos garantir que 1 ou -1 é uma das raízes destas equações. E quando de quarto grau, através de divisões e mudança de variáveis, reduziremos para grau 2 e encontraremos as raízes do Polinômio dado.

No terceiro capítulo teremos a preocupação de mostrar métodos utilizados pelos Babilônicos, Gregos, Árabes e os matemáticos: Cardano, Tartaglia e Ferrari dentre outros nas resoluções de equações cúbicas e quárticas onde a princípio faremos um breve comentário sobre o contexto histórico e apresentaremos métodos geométricos para a solução das mesmas, mas que foram de fundamental importância para se chegar a uma solução algébrica dessas equações.

Palavras-Chave:

Polinômios; Equações Recíprocas; Equações de 2º, 3º e 4º grau

SUMMARY

Here we report resolutions of polynomial equations, 2nd, 3rd and 4th grades. Where the first chapter show the historical context and the first methods of solving equation of 2nd degree, used by Babilônicos, Greeks, Hindus, Arabs, Chinese and Europeans, compared with the current method and showing the contribution that these people have with math that served as a reference for others to find mathematical formulas that facilitate finding the solution of equations of these types. In the second chapter, we show a simple way to find at least one root of polynomial of degree greater than or equal to 3, without giving figures the equation is given, just identify only when an equation Reciprocal of first or second order, which immediately we will ensure that 1 or -1 is one of the roots testas equations. And when the fourth degree, through divisions and change of variables, reduce to grade 2 and find the rootsofthe Polynomial given. In the third chapter of the concern we show methods used by Babilonick,Greeks,Arabsand mathematicians: Cardano, Tartaglia and Ferrari among others in the resolutions of equations cubical and quarticas where the principle will make a brief comment on the historical context and present methods for geometrical the solution of the same, but which were of fundamental importance for reaching a solution of algebraic equations.Keywords: Polynomials; Equations Reciprocal; Equations of 2nd, 3rd and 4th degree

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 Resolução de equações de 2º grau	11
2.1 Introdução	11
2.2 Os Babilônicos	11
2.3 Resolução do problema	12
2.4 Resolução de equações com coeficiente de x^2 diferente de 1	13
2.5 A Grécia	14
2.6 Índia	15
2.7 Problema de resolução	16
2.8 Mundo Árabe	16
2.9 China	17
2.10 Europa	18
2.11 Comparação	21
3 Resolução de Equações Recíprocas	22
3.1 Introdução	22
3.2 Equação Recíproca	22
3.3 Equação Recíproca de primeira ordem	23
3.4 Equações Recíprocas de segunda ordem	27
3.5 Toda equação recíproca de segunda ordem possui raiz “1”	28
3.6 Toda equação recíproca de segunda ordem com grau par terá as raízes “1” e “-1”	29
3.7 Resolução de equação recíproca de quarto grau	31
4 Resolução de equações polinomiais de graus três e quatro	35

4.1 Introdução	35
4.2 Contexto Histórico	35
4.3 Os Babilônios	35
4.4 A Grécia Antiga	37
4.5 Arábia	38
4.6 Dedução da solução cúbica na forma $x^3+px+q=0$	40
4.7 Método de resolução da equação de quarto grau	42
CONCLUSÃO	44
REFERÊNCIAS.....	45

1-Introdução

Este trabalho tem por finalidade estudar as resoluções de equações polinomiais de graus 2, 3 e 4, abordando o contexto histórico e apresentando métodos que deram origem a essas equações e conseqüentemente obtiveram suas primeiras soluções. No decorrer do nosso trabalho vamos apresentar nomes de matemáticos que foram fundamentais no aperfeiçoamento da forma e da resolução de equações polinomiais. Queremos enfatizar a resolução de casos particulares das equações de graus 3 e 4, onde a do 3º grau, deixou uma discussão de quem realmente descobriu sua resolução e qual foi a contribuição dos povos da antiguidade para a resolução dessa equação. Também vamos comparar a resolução da equação do 3º grau entre três matemáticos, Cardano, Tartaglia e Ferrari.

Também encontraremos técnicas interessantes e de fácil compreensão que desperte a curiosidade daqueles que estudam na terceira série do Ensino Médio até o Ensino Superior, onde os alunos apresentam bastante dificuldade de encontrar uma das raízes de polinômios de 3º e 4º graus. A técnica que será utilizada denomina-se Soluções de Equações Recíprocas.

2 – Capítulo I: Contexto Histórico e os Primeiros Métodos de Resolução de Equações

2.1 - Introdução

Este capítulo tem por finalidade contar um pouco da história das equações polinomiais do 2º grau e suas resoluções encontradas pelos: Babilônicos; Gregos; Índia; Árabes; Chineses; Europeus, enfim, até os dias atuais. Também vamos comparar as técnicas de cada povo citado acima.

2.2 Os Babilônicos

Os Babilônicos começaram a resolver equações do 2º grau através da necessidade de medir área de terreno. Sendo que os métodos utilizados serviram para que os matemáticos se aprofundassem nesses cálculos e criassem fórmulas e resoluções de equações do 2º grau.

“Alguns casos de equações do 2º grau mais freqüentemente encontrado onde eles escreviam eram do tipo: $x^2 + bx = c$ ou $x^2 - bx = c$, onde o coeficiente de x^2 era 1, com $b > 0$ e $c > 0$. Um dos problemas encontrados nesses escritos era: a área de quadrado menos seu lado é 870. Qual é o lado do quadrado?”

(Boyer, 1996. p. 21)

2.3 Resolução do Problema

Observando a equação $x^2 - bx = c$ e substituindo os dados do problema na equação temos:

$x^2 - x = 870$, onde esta equação é uma equação do 2º grau na variável x . Para resolverem esta equação eles utilizaram vários passos, o primeiro era identificar os coeficientes da variável e o termo independente. Nesse caso $b=1$ e $c = 870$. Consideravam a metade do coeficiente da variável de grau 1, que é o próprio b .

Como $b = 1$ então $\frac{1}{2} = 0,5$ utilizavam sempre a forma decimal. Segundo calculavam

o quadrado da metade de b , ou seja, $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0,25$. Terceiro adicionavam o

resultado obtido ao termo independente que é c ,

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0,25 + 870 = 870,25$. Quarto calculavam a raiz quadrada do resultado obtido

do 3º passo, sendo assim, teremos:

$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \sqrt{870,25} = 29,5$. Quinto e último passo adicionavam a metade do

coeficiente b ao resultado obtido do 4º passo e obtinham uma solução da equação,

ou seja:

$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2} = \sqrt{870,25} + \frac{b}{2} = 29,5 + \frac{1}{2} = 30$. Logo 30 é raiz da equação.

Observando os métodos pelos babilônicos e principalmente o último percebe-se que realmente a fórmula deles é parecida com a atual. Vamos calcular esta fórmula:

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} + \frac{b}{2}, \text{ tirando o m.m.c, temos:}$$

$$\sqrt{\frac{b^2 + 4c}{4}} + \frac{2b}{4} = \frac{\sqrt{b^2 + 4c}}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}, \text{ sabendo que os Babilônicos não}$$

consideravam raízes negativas. E eles também sabiam resolver equações do 2º grau quando o coeficiente da variável x^2 fosse diferente de **1**. É o que vamos mostrar no item 2.4.

2.4 Resoluções de Equações com o Coeficiente de x^2 diferente de 1

Os babilônicos resolviam equações com coeficiente de x^2 diferente de **1**, reduzindo-a para uma equação de coeficiente x^2 igual a **1**. Eles têm uma equação de coeficiente x^2 diferente de **1**, multiplicam toda equação por uma quantidade igual ao coeficiente de x^2 ou uma equação do tipo: $ax^2 + bx = c$ era multiplicada por **a**, $a.ax^2 + a.bx = a.c \Leftrightarrow (ax)^2 + b(ax) = ac$, daí substituíam **ax** por outra quantidade desconhecida **ax = w**, ou seja, uma mudança de variável de tal modo que encontraria uma nova equação do tipo $w^2 + bw = ac$, usando a fórmula para equação de coeficiente x^2 igual a **1**, obtém-se um valor por **w**. E desfazendo a mudança de variável obtém-se uma solução para equação.

Exemplo: Dada a equação $2x^2 - x = 10$, vamos encontrar a solução.

Multiplicando pelo valor do coeficiente x^2 que é **2**. Então

$$2.2x^2 - (2x) = 2.10 \text{ e obtemos:}$$

$4x^2 - 2x = 20$, substituímos o valor $2x$ por uma quantidade desconhecida $2x = y$, ou seja, fazendo a mudança de base. Como $4x^2 = (2x)^2$, temos :

$y^2 - y = 20$. Obtendo uma nova equação de coeficiente da variável y^2 igual a 1.

Resolvendo pelo primeiro método Babilônico, identificamos o coeficiente $b = 1$ e termo independente $c = 20$. Agora pegamos a metade b e elevamos ao quadrado

$(\frac{b}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} = 0,25$. Somando o valor obtido com c , teremos:

$$0,25 + c = 0,25 + 20 = 20,25,$$

Calculando a raiz desse resultado $\sqrt{20,25} = 4,5$ e adicionando esse com a metade de b, temos: $4,5 + 0,5 = 5$, logo $y = 5$. Desfazendo a mudança de variável temos:

$2x = y \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$. Logo $\frac{5}{2}$ é raiz da equação $2x^2 - x = 10$.

Os babilônicos também conheciam os produtos notáveis que são utilizados atualmente e bem conhecidos de nós. São eles do tipo:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, sabiam até que se somasse $4ab$ mais $(a - b)^2$ seria igual a $(a + b)^2$. Mas apesar dos babilônicos conhecerem

tudo isso eles só consideravam os resultados positivos das resoluções de equações.

Não era só os babilônicos que sabiam resolver equação do 2º grau, pois os gregos também sabiam. Veja no item 2.5.

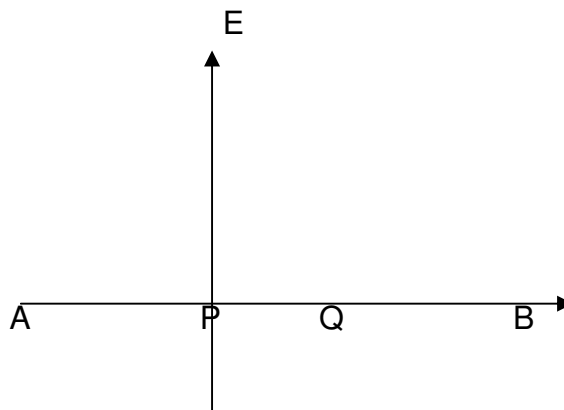
2.5 A Grécia

Os Gregos tinham certo carisma pela geometria, e como tinham certa dificuldade de trabalhar com os números racionais e irracionais e a ausência da prática do sistema de numeração grego é que esta civilização de (500 a 200 a.C.)

resolveram problemas matemáticos geometricamente dentre os quais as resoluções de equações do 2º grau. Um dos métodos que se sabe, usado, por exemplo, na resolução de uma do tipo $x^2 - bx + 9 = 0$. Era resolvida desta maneira:

Trace o segmento $AB = 10$. Por P , ponto médio de AB , levante o segmento perpendicular $PE = 3$ (igual a raiz quadrada de 9) e, com centro em E , e raio PB , trace um arco de circunferência que corta AB no ponto Q . A desejada será dada pelo comprimento AQ . Com efeito, por construção, a medida do segmento AQ

será $\frac{10}{2} + \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - (\sqrt{9})^2}$ e corresponde a raiz 9 da equação



Na Índia se destacaram grandes matemáticos. Como podemos ver no item 2.6.

2.6 A Índia

Na matemática hindu houve grandes matemáticos que se destacaram. Desses matemáticos, podemos citar os nomes de dois mais conhecidos, Bhaskara que no século XII usou a solução que mais se assemelha com a atual e Sridhara

que nesse mesmo século deu origem a regra que é conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara.

Resolvendo problemas de ordem comercial/financeira Bhaskara apresenta resoluções de equações do 2º grau. Veja no item 2.7.

2.7 Problema e Resolução

O matemático Bhaskara resolvia seus problema comercial/financeiro na linguagem de hoje desta forma:

Um capital de **100** foi emprestado a certa taxa de juros ao ano. Após um ano, o capital foi retirado e o juro obtido foi aplicado durante mais um ano. Se o juro total foi 75, qual foi a taxa ao ano?

Sendo que a taxa $x\%$, tem-se que o juro no 1º ano será de x e no 2º ano de $x.x/100$, ou seja: $x + x/100 = 75$ ou $x^2 + 100x - 7500 = 0$.

E a solução atualmente falando, seria: Leve a metade do capital (coeficiente de x) ao quadrado, acrescente o resultado ao produto dos juros totais (termo independente) pelo capital, extraia a raiz quadrada e diminua a metade do capital, o que leva a solução procurada $(x = \sqrt{50^2 + 75 \times 100} - 50 = 50)$. Já na Arábia os matemáticos fundaram algumas bibliotecas, veja no item 2.8

2.8 Mundo Árabe

Se por um lado, os Árabes foram responsáveis por fazer desaparecer grande parte do conhecimento ocidental, por outro lado contribuíram para sua

preservação. O extermínio se deu quando conta a história de 641 a.C. Omar mandou que fosse destruída toda a Biblioteca de Alexandria. E a preservação foi dividida à atuação de três Califas, Ensiderodes os grandes patronos da cultura alássida: al-Mansur, Harum al-Rachid e al-Mamum, que durante seus reinados foram responsáveis pela tradução, do grego para árabe. Das mais importantes escritas científicas conhecidas, entre elas, o almagesto de Ptolomeu e os elementos de Euclides.

Al-Mamum fundou em Bagdá no século IX, um centro científico similar a Biblioteca de Alexandria, denominado Casa da Sabedoria (Bait al-Mikma), para onde convergiram muitos matemáticos, dentre os quais Manamed al-Musa al-Knowarizmi, que, além de outras obras, escreveu, em 825, Hsal al-Jabr Ea'lmuzalalah, obra de grande potencial didático, traduzida como ciência das equações. Nessa obra, Al-Knowazimi apresenta a equação polinomial do 2º grau, bem como sua resolução de forma retórica, além de uma comparação geométrica denominada método de completar quadrados, método geométrico distinto daquele utilizado pelos gregos. De modo geral apresentava muitos casos somente uma raiz (positiva).

Na China foi encontrada uma técnica de resolução de equação do 2º grau, que veremos no item 2.9.

2.9 China

Em 1303, o grande matemático chinês daquela época, Chu Shih-Chiuh, apresenta na obra S.su-Yüan Yu-Chien (Precioso espelho dos quatro elementos) uma técnica especial para a solução de equação polinomial do 2º grau, baseada em

aproximações sucessivas, de grade precisão, denominada de método fan-fan, que foi apresentado de forma retórica e chega a uma única raiz (positiva).

Em 1819, o matemático inglês William George Harner reivindicava a descoberta do método fan-fan, rebatizando-o de método de Harner.

Vejamos no que consistia o método fan-fan: para encontrar, por exemplo, a solução da equação hoje escrita como $x^2 + 252x - 5292 = 0$, ele partia de uma solução aproximada, no caso, $x = 19$ (a raiz positiva dessa equação está entre **19 e 20**), e usava o fan-fan, no caso, a transformação $y = x - 19$, para obter a equação $y^2 + 290y = 143$ em y , cuja solução está entre 0 e 1. Identificando y^2 com y , obtenha-se uma solução aproximada para essa equação: $y = 19 + 143/291$, é assim o valor inicial de x era corrigido para $x = 19 + 143/291 = 19,49$. A idéia era repetir o processo a partir desse novo resultado até chegar a um número que não mais se modificasse. No caso, fazendo $z = x - 19,49$, obtinha-se a equação em z , $z^2 + 290,98z = 0,66$ e, daí: $z = 0,66/291,98 = 0,0022$, o que já confirmava as duas casas decimais do valor encontrado no passo anterior (com efeito, os primeiros dígitos dessa raiz são 19,49226).

Na Europa Descartes e outros resolviam equações do 2º grau usando a fórmula de Bhaskara, como podemos ver no item 2.10.

2.10 Europa

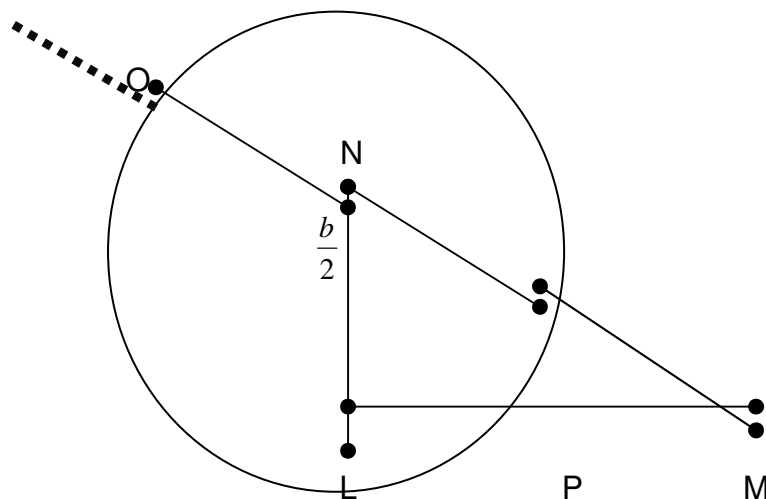
Embora ainda não se usasse o formalismo atual, para resolver problemas envolvendo as atuais equações do 2º grau resumia-se usando a fórmula de Bhaskara.

A seguir veremos outros processos desenvolvidos naquela época por matemáticos europeus.

O método de Viète (1540-1603), que consistia em considerar variáveis de u e v e fazer $x = u + v$.

Em 1637, o Francês René Descartes, além de possuir uma notação que diferenciava da atual somente pelo símbolo de igualdade, desenvolveu um método geométrico pra obtenção da solução positiva.

Descartes resolvia equações do tipo: $x^2 = bx + c^2$, $x^2 = c^2 - bx$ e $x^2 = bx - c^2$, sempre com b e c positivos. Por exemplo, para resolver equações do 1º tipo, $x^2 = bx + c^2$, ele usou o seguinte método: Traça-se um segmento LM , de comprimento C , e, em L , levanta-se um segmento NL igual a $b/2$ e perpendicular a LM . Com centro N , construímos um círculo de raio $b/2$ e trocamos a reta por M e N que corta o círculo em O e P . Então a raiz procurada é o segmento OM .



Com efeito, no triângulo retângulo MLN , se $OM = X$, tem-se:

$$x(-b/2)^2 = (b/2)^2 + c^2 \text{ e daí } x^2 - bx = c^2.$$

Hoje sabemos que a segunda raiz é - PM, mais Descarte não considerava a raiz negativa.

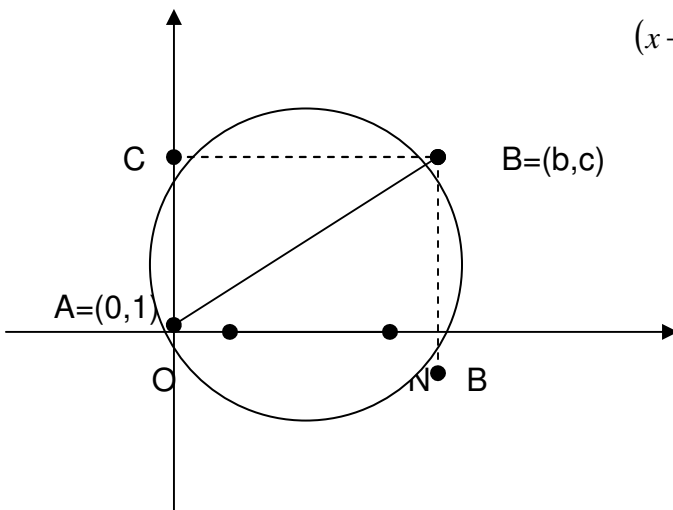
No século XVIII, o inglês Sir John Celie, em sua obra *Elements of Geometry*, apresenta o seguinte procedimento.

É dada uma equação quadrática $x^2 + bx + c = 0$, sobre um sistema cartesiano retangular de referência, marque os pontos $A = (0,1)$ e $B = (b,c)$. Trace o círculo de diâmetro AB. A abscissa dos pontos em que esse círculo corta o eixo x , se cortar, são as raízes da equação quadrática dada:

Com efeito, a equação do círculo traçado é.

$$(x - b/2)^2 + [y - (c+1)/2]^2 = (b/2)^2 + [(c+1)/2 - 1]^2$$

e, daí, quando $y=0$, tem-se $x^2 - bx = -c$.



Podemos perceber que as equações estudadas atualmente são nada mais do que uma apresentação herdada dos europeus e a solução fornecida pelos hindus. Sabe-se que desde 1700 a.C. houve uma preocupação com o trato e desenvolvimento desse tipo de equação, analisando as relações entre seus coeficientes e suas raízes, a fim de se determinar mais facilmente o seu sinal, módulo e valores. Vejamos a comparação de todos os países nas resoluções de equações no item 2.11.

2.11 Comparação

No estudo dos diferentes povos no decorrer dos séculos podemos notar os avanços que começa desde o Egito aos dias atuais, as diferentes técnicas e modos de abordar as equações, percebemos que:

- Babilônicos – utilizava uma tabula de argila através de palavras que fornecia somente números positivos, e já resolvia equações de coeficiente x^2 diferente de **1**.
- Grécia – tinha grande dificuldade na utilização dos números racionais e irracionais, por outro lado utilizava muito a geometria e sempre relacionou o estudo das equações na geometria.
- Índia – foi na Índia que surgiu a fórmula utilizada atualmente, e conhecida no Brasil como fórmula de Bhaskara, as soluções também eram enunciadas através de palavras.
- Mundo Árabe – os Árabes foram responsáveis por fazer desaparecer grande parte do conhecimento ocidental, mas, por outro lado contribuíram para sua preservação.
- China – (Precioso espelho de quatro elementos) uma técnica especial para a solução de equação polinomial do 2º grau, baseada em aproximações.

No próximo capítulo apresentaremos das resoluções de Equação Recíproca.

3 Capítulo II: Resolução de Equações Recíprocas

3.1 introdução

Este capítulo tem por finalidade mostrar um método simples e prático para encontrar uma das raízes de Equações Polinomiais de grau $n \geq 3$, sem atribuir valores para encontrar uma das soluções destas equações. Basta conhecermos o que é uma Equação Polinomial Recíproca de Primeira e Segunda Ordem, que de imediato vai nos garantir que 1 ou -1 é uma das raízes da Equação dada, sendo assim, pelo dispositivo prático de Briott-Ruffini ou método da chave, podemos encontrar as demais raízes.

3.2 Equação Recíproca

Geralmente na 3ª série do Ensino Médio, quando estudamos Equações Polinomiais, e queremos encontrar uma raiz ou a solução de Polinômio de grau $n \geq 3$ por não conhecer uma técnica simples e prática e, considerando que, em geral, a abordagem de conceitos algébricos em sala de aula é considerada um conteúdo totalmente direcionado apenas para os livros didáticos, na visão do aluno, torna-se um pouco complexa a compreensão do mesmo, pelo fato que o professor não utiliza outro recurso, a não ser o material que recebe da escola. Por isso realizamos aqui uma pesquisa bibliográfica para encontrar técnicas interessante que facilitam a compreensão dos alunos, envolvendo alguns conceitos e técnicas encontradas em "Soluções de Equações Recíprocas.

Uma Equação Polinomial Recíproca, ou simplesmente `` Equação Recíproca``, é toda aquela que os coeficientes equidistantes são iguais ou simétricos. Como exemplos temos as equações $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ e $2x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 3x - 2 = 0$. Observando a primeira equação, podemos constatar que os coeficientes equidistantes da variável: x^5 e x^0 ; x^4 e x^1 ; x^3 e x^2 são iguais. Já na segunda equação, podemos observar que os coeficientes equidistantes da variável: x^5 e x^0 ; x^4 e x^1 , x^3 e x^2 são simétricos, ou seja, a diferença entre os coeficientes equidistantes são iguais a zero. Então podemos concluir que as duas equações são Recíprocas, pois satisfaz o que falamos no início do parágrafo.

Genericamente falando, seja as equações racionais inteiras

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \quad \text{e}$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \dots - a_2x^2 - a_1 - a_0 = 0$$

, ordenadas segundo as potências decrescentes da variável x , com os coeficientes a_0, a_1, \dots, a_n números reais, com $a_0 \neq 0$ e n um número natural.

(Paulo Marques, 2000. p.57)

Então dizemos que estas equações são Recíprocas se, e somente se, os coeficientes equidistantes dos extremos forem iguais ou simétricos. Esta distinção nos permite, portanto, classificar estas equações em duas: Equação Recíproca de Primeira Ordem e Equação Recíproca de Segunda Ordem, que encontra-se no item 3.3 e 3.4.

3.3 Equação Recíproca de Primeira Ordem

Para iniciar vamos considerar uma equação genérica como sendo, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ com $n \in \mathbb{N}$, independente de

quaisquer que sejam seus coeficientes, necessariamente os termos equidistantes do centro têm que ser iguais, pois se isso não ocorrer, não teremos uma Equação Recíproca de Primeira Ordem. Como podemos perceber, o coeficiente que multiplica a incógnita x^n e o termo idempedente são iguais, o mesmo acontece com os coeficientes de x^{n-1} e x ; x^{n-2} e x^2 . Portanto, podemos dizer que uma equação vai ser Recíproca de Primeira Ordem, se e só se, os termos equidistantes forem iguais. Sendo que, o grau da equação não vai denominar se ela é, ou não, uma Equação Recíproca de Primeira Ordem, mas sim, os coeficientes que os denominam.

Por exemplo: seja a equação $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$.

Diretamente podemos afirmar que é uma Equação Recíproca de Primeira Ordem, pois os coeficientes equidistantes são iguais.

Quando nos deparamos com uma Equação Recíproca de Primeira Ordem de grau $n \geq 3$, com n ímpar e queremos encontrar uma das raízes desta equação, afim de reduzir o grau da mesma, e pelo dispositivo prático de Briott Ruffini ou método da chave, encontrar as demais soluções, não necessariamente ficamos atribuindo valores a esta equação, pois ela vai nos garantir que -1 será uma das raízes.

Considere a equação genérica $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, com n ímpar. Verificando se realmente isso acontece. Vamos substituir -1 da equação por x e calcular:

$a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + a_2(-1)^{n-2} + \dots + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = 0$, como todo número negativo com expoente ímpar é sempre negativo e, todo número negativo com expoente par é sempre positivo, (pois a propriedade de potência nos garante isso), e levando em consideração que a subtração de um número ímpar por número

ímpar é par, e que, a subtração de um número ímpar pelo número par é ímpar, temos:

$$a_0(-1) + a_1(1) + a_2(-1) + \dots + a_2(1) + a_1(-1) + a_0 = 0$$

(1)

Resolvendo os produtos e cancelando os termos opostos :

$-a_0 + a_1 - a_2 + \dots + a_2 - a_1 + a_0 = 0$, o resultado desta equação é zero. Portanto, podemos afirmar que toda Equação Polinomial Recíproca de Primeira Ordem com grau ímpar terá como raiz o valor -1 .

Por exemplo temos a equação $2x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$. Como ela é uma equação recíproca de primeira ordem de grau ímpar, vamos substituir -1 por x na equação, teremos:

$2(-1)^5 + 3(-1)^4 - 5(-1)^3 - 5(-1)^2 + 3(-1) + 2 = 0$, resolvendo as potências, temos:

$-2 + 3 - 5 + 5 - 3 + 2 = 0$, cancelando os termos opostos, encontramos $0 = 0$, portanto -1 é raiz de uma equação recíproca de primeira ordem de grau ímpar.

Consideramos apenas a Equação Recíproca de Primeira Ordem de grau ímpar que admite esta raiz, porque quando o grau desta equação for par, não podemos afirmar se realmente -1 vai ser ou não raiz desta equação.

Agora vamos verificar se -1 é raiz da equação de grau par. Para isso consideramos a equação genérica citada acima:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

(2)

Sendo assim, teremos:

$a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1} + a_2(-1)^{n-2} + \dots + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 = 0$, como n é um número par, e lembrando a propriedade de potência, que todo número negativo com expoente par dá positivo, temos:

$a_0(1) + a_1(-1) + a_2(1) + \dots + a_2(1) + a_1(-1) + a_0 = 0$, fazendo a multiplicação, teremos:

$a_0 - a_1 + a_2 + \dots + a_2 - a_1 + a_0 = 0$, efetuando os termos semelhantes:

$2a_0 + 2a_2 - 2a_1 \neq 0$, logo não podemos dizer diretamente que -1 é raiz de uma Equação Recíproca de Primeira Ordem de grau par. Também não podemos afirmar que -1 não vai ser uma raiz desta equação. Pois, vai existir casos que -1 vai ser uma das raízes. Só que, isso vai depender dos coeficientes desta equação. Por exemplo, veja as seguintes equações:

$$1x^4 + 3x^3 + 12x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ e } x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0 \quad (3)$$

Observe que é uma equação de grau par e, por hipótese, temos que as equações são recíprocas de primeira ordem, pois os termos equidistantes são iguais. Agora vamos verificar se -1 é raiz da primeira equação. Substituindo -1 pela variável " x ", temos:

$$1(-1)^4 + 3(-1)^3 + 12(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0,$$

$1 - 3 + 12 - 3 + 1 = 0$, somando todos os valores encontramos:

$14 - 6 = 0 \Rightarrow 8 = 0$, que é um absurdo, pois $8 \neq 0$, logo -1 não é raiz da primeira equação.

Agora vamos substituir -1 na segunda equação:

$(-1)^4 + 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0$, resolvendo a equação, temos:

$$(-1)^4 + 3(-1)^3 + 4(-1)^2 + 3(-1) + 1 = 0; \quad (4)$$

$1 - 3 + 4 - 3 + 1 = 0$, somando todos os números, encontramos $6 - 6 = 0$. Como podemos observar, o resultado deu exatamente zero. Logo -1 é uma das raízes da

segunda equação. Portanto, podemos concluir que em uma Equação Recíproca de Primeira Ordem de grau par, não afirmamos diretamente que -1 é ou não é uma das raízes. Para saber se realmente é ou não é, teremos que substituí-lo na equação, caso satisfaça a igualdade, então será uma das raízes.

3.4 Equação Recíproca de Segunda Ordem

Vamos pegar uma equação recíproca de primeira ordem que não tenha as raízes 1 nem -1 , ou seja, como já vimos essa equação só pode ser de grau par, ou seja n par.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

(5)

Agora vamos incluir nela a raiz 1 , ou seja, para que isso ocorra vamos multiplicar toda equação pelo fator $(x - 1)$.

$(x - 1) \cdot (a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0) = 0$, efetuando a propriedade distributiva da multiplicação de polinômios, obtemos:

$$(a_0x^{n+1} + a_1x^n + a_2x^{n-1} + \dots + a_2x^2 + a_0x) - (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0) = 0,$$

(6)

colocando em evidência todos os termos que possuem o mesmo grau, teremos:

$$a_0x^{n+1} + (a_1 - a_0)x^n + (a_2 - a_1)x^{n-1} + \dots + (a_1 - a_2)x^2 + (a_0 - a_1)x - a_0 = 0. \quad (7)$$

Por exemplo, temos a equação $x^5 + 4x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 4x - 1 = 0$.

Note que, exatamente todos os coeficientes dos termos equidistantes dos extremos são opostos (iguais em módulo, mas com sinais diferentes). Isto nos prova que o fator $(x - 1)$, multiplicado por uma Equação Recíproca de Primeira Ordem de grau par, transforma em uma Equação Recíproca de Segunda Ordem. Portanto,

podemos dizer que é uma Equação Recíproca de Segunda Ordem, se e somente se, os coeficientes equidistantes dos extremos forem opostos, ou seja, com sinais trocados.

Por exemplo, temos a equação $8x^3 - 7x^2 + 7x - 8 = 0$

Observe que os coeficientes equidistantes são opostos. Note que o coeficiente da variável x^3 é positivo e, o coeficiente da variável x^0 que chamamos de termo independente é negativo, e que, o coeficiente de x^2 é negativo, e o coeficiente de x^1 é positivo, independente da ordem que aparece, satisfaz a condição de ser uma Equação Recíproca de Segunda Ordem.

3.5 Toda Equação Recíproca de Segunda Ordem possui raiz ``1``

Considerando a equação genérica que foi obtida através do produto $(x - 1)$ pela recíproca de primeira ordem, como vimos no item 2.3.

$$a_0x^{n+1} + (a_1 - a_0)x^n + (a_2 - a_1)x^2 + \dots + (a_1 - a_2)x^2 + (a_0 - a_1)x - a_0 = 0 \text{ com } (n \text{ par}).$$

Agora vamos substituir x por 1 nesta equação, teremos:

$$a_0(1)^{n+1} + (a_1 - a_0).(1)^n + (a_2 - a_1).1^2 + \dots + (a_1 - a_2).1^2 + (a_0 - a_1).1 - a_0 = 0,$$

(8) encontramos:

$$a_0(1) + (a_1 - a_0).(1) + (a_2 - a_1).(1) + \dots + (a_1 - a_2).(1) + (a_0 - a_1) - a_0 = 0, \text{ fazendo}$$

a multiplicação, temos:

$$a_0 + (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \dots + (a_1 - a_2) + (a_0 - a_1) - a_0 = 0$$

(9)

Cancelando os termos opostos, teremos $0 = 0$, isso implica dizer que 1 é realmente uma das raízes desta equação. Então, quando tivermos uma equação,

basta saber se ela é uma Equação Recíproca de Segunda Ordem, se for, podemos considerar de imediato que 1 vai ser raiz da mesma.

Como exemplo temos a equação $7x^3 - 2x^2 + 2x - 7 = 0$,

observe que satisfaz a condição de ser uma recíproca de segunda ordem, pois os coeficientes equidistantes são simétricos. Substituindo 1 por x na equação dada, temos:

$$7(1)^3 - 2(1)^2 + 2 \cdot 1 - 7 = 0,$$

(10)

segundo a propriedade de potência, quando a base for 1 , o expoente pode ser qualquer $n \in \mathbb{N}$, pois 1 elevado qualquer número dá como resultado o próprio 1 , chegamos:

$7 - 2 + 2 - 7 = 0$, efetuando a operação temos que $0 = 0$. Onde concluímos que 1 é raiz de qualquer Equação Recíproca de Segunda Ordem. E se por acaso o grau for par? É isso que veremos no item 3.5.

3.6 Toda Equação Recíproca de Segunda Ordem com grau par terá as raízes 1 e -1 .

Primeiramente há uma condição para que uma equação de grau par seja Recíproca de Segunda Ordem. Para mostrar esta condição, vamos pegar uma equação genérica de segunda ordem de grau ímpar e incluir a raiz -1 , ou seja, multiplicar por $(x + 1)$, para obtermos uma Equação Recíproca de Segunda Ordem de grau par.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + mx^{\frac{n}{2}} - mx^{\frac{n}{2}-1} - \dots - a_1x - a_0 = 0$$

(11)

Considerando que M seja o coeficiente dos termos centrais, e que, $(n/2)$ e $(n/2) - 1$ que vai nos garantir que o coeficiente M está exatamente denominando os termos centrais, onde n é um numero natural ímpar.

Multiplicando a equação por $(x + 1)$:

$$(x + 1)(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + m(x)^{\frac{n}{2}} - (x)^{\frac{n}{2}-1} - \dots - a_1x - a_0 = 0)$$

(12)

Colocando em evidência todas as potências em comum:

$$a_0x^{n+1} + (a_1 + a_0)x^n + \dots + (m - m)(x)^{\frac{n}{2}} - \dots - (a_0 + a_1)x - a_0 = 0. \quad (13)$$

Como n é ímpar, obtemos uma Equação Recíproca de grau par. Podemos constatar que o termo central será necessariamente anulado $(m - m) = 0$. Então, podemos dizer que: Dada uma Equação Recíproca de Segunda Ordem de grau par, obrigatoriamente, o termo médio de seu desenvolvimento será nulo. Com essa condição, vamos verificar se 1 e -1 serão raízes desta equação.

Considerando a equação anterior e, substituindo 1 por x, com n ímpar, temos:

$$a_0(1)^{n+1} + (a_1 + a_0)(1)^n + \dots + (m - m)(1)^{\frac{n}{2}} - \dots - (a_0 + a_1)(1) - a_0 = 0$$

$$\Rightarrow a_0 + (a_1 + a_0).1 + \dots + (m - m).1 - \dots - (a_0 + a_1) - a_0.$$

Cancelando os termos simétricos, chegamos que $0 = 0$, logo toda

Equação Recíproca de Segunda Ordem com grau par admite 1 como raiz. Agora, substituindo -1 na mesma equação.

$$a_0(-1)^{n+1} + (a_1 + a_0)(-1)^n + \dots + (m - m)(-1)^{\frac{n}{2}} - \dots - (a_0 + a_1)(-1) - a_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 + (a_1 + a_0).1 + \dots + (m - m) - \dots - (a_0 + a_1) - a_0, \quad (14)$$

Cancelando os termos opostos concluímos que -1 também é solução da equação.

Veja alguns exemplos:

$$6x^8 + 2x^7 - 11x^6 + x^5 - x^3 + 11x^2 - 2x - 6 = 0$$

(15)

$$4x^4 - 3x^3 + 3x - 4 = 0$$

(16)

$$9x^4 - 8x^3 + 5x^2 + 8x - 9 = 0$$

(17)

Observe que a propriedade de existência da recíproca de grau par, está presente nas duas primeiras equações, pois o termo central é nulo. É fácil saber qual será o termo central. Primeiro olhamos qual o maior expoente da equação. Depois basta dividir o maior expoente por **2**, assim saberemos qual será o termo central. Como exemplo, pegando a primeira equação, o expoente é **8**. Vamos dividir **8 + 2 = 4**. Onde observamos que a variável x^4 não aparece, ou seja, o coeficiente central é zero. Na segunda, a variável x^2 não aparece. Já na terceira equação, o expoente maior é **4**. Dividindo **4 + 2 = 2**, onde a variável x^2 aparece, isso significa dizer que o coeficiente não é zero. Logo, as duas primeiras equações são Recíproca de Segunda Ordem, já a terceira não é, pois o coeficiente central não é nulo.

3.7 Resoluções de Equação Recíproca de quarto grau

Esta equação possui estratégia muito simples de resolução, que sempre nos levará à resposta sem muita complicação. Para resolver uma equação deste tipo, vamos reduzir o grau desta equação, a fim de chegarmos a uma equação do 2º grau, que vai nos auxiliar a encontrar as demais raízes. Por exemplo, vamos encontrar as raízes da equação recíproca:

$$2x^4 - x^3 - 6x^2 - x + 2 \quad (18)$$

Observe que é uma equação recíproca, pois os coeficientes equidistantes são iguais, e que, é uma do quarto grau. O método consiste em dividir os dois membros da equação por x^2 , a fim de transformar a equação em uma do 2º grau.

Efetutando as divisões:

$$\frac{2x^4}{x^2} - \frac{x^3}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = 0 \quad (19)$$

Usando a propriedade de divisão de potência, teremos:

$$2x^2 - x - 6 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \quad (20)$$

Juntando os termos em comum:

$$2x^2 + \frac{2}{x^2} - x - \frac{1}{x} - 6 = 0$$

Colocando alguns termos em evidências, temos

$$2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 1\left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0 \quad (1)$$

Esta será nossa equação (1). Agora, vamos fazer a mudança de variável, encontrando assim uma segunda equação:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = y \quad (2)$$

Elevando os dois membros da equação ao quadrado e usando a propriedade de produtos notáveis, teremos uma terceira equação:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = y^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x + \frac{1}{x^2} = y^2$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2$$

Isolando a variável x^2 no 1º membro e, finalizando os cálculos, temos uma terceira equação:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \quad (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), teremos

$$\begin{aligned} 2(y^2 - 2) - 1(y) - 6 &= 0 \\ 2y^2 - 4 - y - 6 &= 0 \\ 2y^2 - y - 10 &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Encontramos assim uma equação do 2º grau. Aplicando a fórmula de Bhaskara na equação, teremos:

$$a = 2; b = -1 \text{ e } c = -10$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 + 80$$

$$\Delta = 81$$

$$y' = \frac{-(-1) \pm \sqrt{81}}{2 \cdot 2}$$

$$y' = \frac{1 \pm 9}{4}$$

$$y' = \frac{10}{4} \Rightarrow y' = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad y'' = -2$$

Como $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)$ na segunda equação. E substituindo y' e y'' nela, teremos:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right) = \frac{5}{2} \quad \text{e} \quad \left(x + \frac{1}{x}\right) = -2 \quad (22)$$

Tirando o mmc da 1ª e da 2ª equação, e fazendo o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, teremos duas equações do 2º grau.

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + 2x + 1 = 0 \quad (23)$$

Aplicando a fórmula de Bhaskara na equação e usando a propriedade de produtos notáveis na segunda, teremos as raízes:

$$x = 2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ as raízes da 1ª equação e } x = -1 \text{ e } x = -1 \text{ as raízes da 2ª equação}$$

Como -1 é raiz dupla, consideramos apenas uma raiz, logo o conjunto solução é:

$S = \{-1, 2, \frac{1}{2}\}$, que serão as quatro raízes da equação do quarto grau que apresentamos como exemplo.

Contudo, podemos concluir que as Equações Recíprocas facilitam bastante a resolução de equações de 3º e 4º graus. Apesar que não tem uma fórmula específica, existem estes métodos que facilitam encontrar de imediato

algumas raízes. E quando for de 4º grau, podemos encontrar as quatro raízes, usando o método que apresentamos acima.

No próximo capítulo veremos fórmulas para encontrar as raízes de polinômios de 3º e 4º grau.

4 Capítulo III: Resoluções de Equações polinomiais

de graus 3 e 4.

4.1- Introdução

Este capítulo tem por finalidade relatar um pouco do contexto histórico das resoluções de equações polinomiais de terceiro e quarto grau e mencionar nomes de matemáticos que foram contribuintes fundamentais para essas resoluções.

4.2- Contextos Históricos

Como vimos no primeiro capítulo os babilônicos deram início a resoluções de equações polinomiais de segundo grau. Também os babilônicos deram início às resoluções de equações polinomiais de terceiro grau. Os gregos e os árabes também deram contribuições importantes para resoluções de equações do terceiro grau, mas somente no renascimento italiano que a resolução algébrica de terceiro grau atinge seu ápice, onde se dá início também a resolução de equação do quarto grau.

No item a seguir veremos métodos que os babilônicos utilizavam para solucionar equações cúbicas.

4.3- Os Babilônicos

A resolução de equações quadráticas pelos babilônios naquela época já foi um grau de desenvolvimento matemático surpreendente, extraordinário é saber que entre os babilônios encontraram-se vários exemplos de resoluções cúbicas. Através de tabelas formadas para ajudar os babilônios resolverem equações puras do tipo $x^3 = b$, por exemplo, $x^3 = 8$ e equações mistas na sua forma padrão $x^3 + x^2 = a$, por exemplo, $9x^3 + 3x^2 = 4$ onde atribuíam valores para a combinação $n^3 + n^2$ sendo n um número inteiro de valores entre 1 e 30. Encontravam rapidamente a solução de uma equação da forma $x^3 + x^2 = 4,12$ é igual a 6. E como os babilônios já usavam o método da substituição encontraram a solução de uma equação do terceiro grau como $144x^3 + 12x^2 = 21$ multiplicavam ambos os membros por 12, utilizavam a mudança de variável $y = 12x$, onde equação ganharia uma nova forma, ou seja, $y^3 + y^2 = 4,12$. Da qual se encontra $y = 6$ e conseqüentemente $x = 1/2$.

Já as equações de forma $ax^3 + bx^2 = c$ os babilônios multiplicavam tudo por a^2/b^2 reduzindo-a para a sua forma normal, obtendo uma equação cúbica do tipo padrão com incógnita $ax/b, (ax/b)^3 + (ax/b)^2 = c a^2/b^3$, procurando na tabela o valor dessa incógnita determinava o valor de x . Não se sabe se os babilônios realmente foram capazes de reduzir as equações cúbicas de quatro termos na sua forma normal em três termos, ou seja, transformar uma equação do tipo $ax^3 + bx^2 + cx = d$ em uma equação do tipo $px^3 + qx^2 = r$. Pois se chegaram a esse grau de desenvolvimento matemático é de se admirar o alto nível de conhecimento do povo babilônios, que chegaram a chamar as dos tipos $ax^4 + bx^2 = c$ e $ax^3 + bx^4 = c$ em equações quadráticas em x^2 e x^4 .

No próximo item apresentaremos métodos utilizados pelos gregos da Antiga Grécia.

4.4 A Grécia Antiga

O que leva os gregos a interessar-se por um estudo das equações cúbicas foi a necessidade que eles tinham para calcular volumes de sólidos. um dos problemas que chega aos nossos conhecimentos e um dos mais importantes para os gregos na antiguidade era a duplicação do cubo, problema esse que é enunciado da seguinte forma: encontrar a medida do lado do cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo dado.

Pois foi esse problema que levou os gregos a solucionarem equações cúbicas, e para entrar a solução desse problema foi criada as secções cônicas por Menaecmus aproximadamente a 350 a.C. Já Hipoerates de chios que viveu por volta de 430 a.C. mostrou que para resolver um problema como esse necessitaria encontrar se possível e usar curvas com a seguinte propriedade: $a = x = y$, em que a é a medida de um segmento qualquer. Para esse caso, Menaecmus torna um cone e um plano e, interceptando estas duas superfícies geométricas, que são familiares a ele, descobre um grupo de curvas que satisfazem tais propriedades. Construindo duas parábolas de mesmo vértice cujas equações em notação atual são $y^2 = ax$ e $x^2 = 2ay$, a abscissa do ponto intersecção destas duas curvas é a medida do lado do cubo procurado.

No tratado sobre a esfera e o cilindro, usou o método mencionado acima para solucionar o problema de como cortar uma esfera dada de modo que os volumes dos dois segmentos esféricos estejam numa certa razão. No seu

aprofundado estudo matemático Arquimedes também descobre uma condição relacionada aos coeficientes da equação, para saber o número de raízes reais que ela possui. Suas equações são do tipo: $b^2d = x^2(c - x)$. Mas qualquer cúbica pode ser transformada nesta forma chamada arquimediana. Assim, seu desenvolvimento é válido para qualquer equação de terceiro grau.

No item 2.5 trataremos de métodos utilizados pelos árabes para solucionar equações cúbicas.

4.5 A Arábia

A matemática Arábia que foi herança grega obteve um desenvolvimento matemático fantástico na tradução e estudo das obras gregas como: Ptolomeu, Euclides, Diofante, entre outros; entre os árabes capazes de dar continuidade ao estudo destas obras dá-se destaque a uma Umarbrahim Al-Khayyami, mas conhecido como Omar Khayyam, com seu estudo geométrico para resoluções de uma equação do terceiro grau.

Omar Khayam que explica que a álgebra tem por objetivo determinar quantidades numéricas e geométricas desconhecidas e mostra como uma equação cúbica pode ser resolvida através de intersecção de cônicas.

Exemplo: Dada a cúbica $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$, substituímos x^2 por $2py$, o que resulta na equação $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$; o que é uma hipérbole. Como $x^2 = 2py$ é uma parábola, traçando estas duas curvas em mesmo plano cartesiano, teremos a intersecção delas como raiz real da equação cúbica dada inicialmente. Por esse raciocínio Omar Khayyam acredita ser impossível dar soluções são apenas geométricas.

Um por outro matemático Árabe que segue os passos de Khayyam é Sharaf al-Din al-tusi, cujo interesse está em encontrar condições para os coeficiente que determinam o número de soluções possíveis para a equação. Assim como Omar Khayyam, Al-tusi também classifica os tipos de cúbicas em grupos, observando, entretanto, o número de raízes positivas ou negativas de cada uma delas.

Al-Tusi dá um passo a mais que Omar khayyam, sempre argumentava que o que levava a intersecção das duas cônicas, alcançava ou não o valor de b na equação $x^2(b-x)$. Analisar com atenção essa equação, foi sua contribuição mais original.

Dentro da história da Álgebra moderna, existe um capítulo referente a teoria de equações, mais precisamente, as equações polinomiais que deve ser encarado como um dos mais relevantes. Remetendo ao Passado – Por volta de 1800 A.C alguns métodos geométricos de resolução de equações de grau 2 já eram utilizados pelos Gregos. Na Era Cristã, os Hindus ao contrário dos Gregos empregaram métodos aritméticos para solucionar tais equações. Após o surgimento da solução analítica da equação do segundo grau, vários matemáticos começaram a procurar soluções para encontrar as raízes de equações de grau 3 e 4.

“É Importante salientar que somente no Brasil a solução da equação na forma $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, é conhecida como fórmula de Bhaskara matemático Hindo do século XII. Sabe-se que tal solução já existia aproximadamente mil anos antes”.

(Boyer, 1996. p.150)

Todavia as equações de grau superior a dois resistiram a todos os esforços dos matemáticos da antiguidade. Somente no século XVI, foi publicado o trabalho Ars Magna por Girolamo Cardano (1501 – 1576), contendo a solução da

equação cúbica da forma $x^3 + px + q = 0$. Tal solução fica conhecida como fórmula de Cardano, porém, mais uma vez não foi dado crédito ao seu real descobridor Nicolas Tartaglia (1500-1557) que após insistência de Cardano cedeu, informando tal solução. Cardano foi apenas quem publicou a solução.

A dedução da solução algébrica da equação da forma $x^3 + px + q = 0$ apesar de fácil compreensão não é apresentada nos livros do ensino médio, apenas é citada em alguns, portanto faz necessário apresentarmos neste trabalho.

4.6 Dedução da solução da equação cúbica na forma $x^3 + px + q = 0$

Iniciaremos decompondo as raízes da equação $x^3 + px + q = 0$, como soma de duas parcelas $x = u + v$, assim obtemos:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$

desenvolvendo o produto,

$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$

ou ainda,

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \quad (1)$$

Tartaglia observou que: se $(3uv + p) = 0$, a equação (01) seria satisfeita se $u^3 + v^3 = -q$, portanto é possível encontrar as raízes da equação determinando os valores u e v que satisfizessem o seguinte sistema de equações.

$$\begin{aligned} uv &= -\frac{p}{3} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$

Elevando a potência cúbica a primeira equação, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} u^3 v^3 &= -\frac{p^3}{27} \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned} \quad (2)$$

Determinar dois números conhecendo seu produto e sua soma e problema de resolução de equação do segundo grau. Desta forma, u^3 e v^3 são as raízes da equação quadrática:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0,$$

(3)

da qual obtemos as raízes,

$$t = \frac{-q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

(4)

e assim,

$$u^3 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

(5)

$$v^3 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

(6)

Portanto, como x é combinação de u e v temos finalmente:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}, \quad (7)$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 121}}. \quad (8)$$

Através do método de tentativa e erro, não se sabe quantas vezes,

Bombelli verificou a seguinte relação.

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3$$

(9)

$$= 8 + 12 \cdot \sqrt{-1} - 6 - (\sqrt{-1})$$

(10)

$$= 2 + 11\sqrt{-1}$$

(11)

$$= 2 + \sqrt{-121},$$

(12)

Do mesmo modo encontra que,

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 - \sqrt{-121}. \quad (13)$$

Assim através da solução encontrada usada a fórmula de Tartaglia –

Cardano, obtendo-se a mesma raiz encontrada com a observação:

$$x = 2 + \sqrt{-121} + 2 - \sqrt{-121} = 4, \quad (14)$$

resultado observado inicialmente por Bombelli.

Observe que Bombelli ao realizar sua verificação, imagina alguns valores antes não conhecidos. São eles:

$$\begin{aligned}(\sqrt{-1})^2 &= -1 \\(\sqrt{-1})^3 &= (\sqrt{-1})^2 \cdot \sqrt{-1} = -\sqrt{-1}.\end{aligned}\tag{15}$$

Eis estão que surge a descrição Números Imaginários ou os famosos Números Complexos. Somente no século XIX o matemático Gauss utiliza sem desconfiança tais números e então os complexos começam a ganhar sua cidadania plena.

No item 4.7 apresentaremos um método de resolução de equação do quarto grau.

4.7 Método de Resolução de Equação de Quarto Grau

Este item tem por finalidade mostrar a resolução de equação de quarto grau pelo método do matemático Ludorico Ferrari, que era discípulo de Cardano.

Logo após a grande descoberta das soluções algébricas para equações cúbicas; o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi propõe a Cardano o seguinte problema: dividir 10 em três partes que formem uma proporção contínua sendo o produto das duas primeiras iguais $a \cdot b$. Denotando-se por a, b, c as três partes, teremos:

$$a + b + c = 10, \quad ac = b^2, \quad ab = 6,\tag{16}$$

note que, eliminando a e c , obtém-se a equação quadrática, $b^4 + 6b^2 + 36 = 60b$. Cardano não conseguiu solucionar esse problema; mas seu discípulo Ferrari teve o grande mérito de encontrar essa solução que Cardano teve o prazer de publicar na sua grande obra Ars Magna.

O método utilizado por Ferrari para resolver o problema proposto por Da Coi a Cardano foi o seguinte: Tomando a equação,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0.$$

(17)

Obtém-se $x^4 + 2px^2 + p^2 = px^2 - qx + p^2 - r$ ou $(x^2 + p)^2 = px^2 - qx + p^2 - r$, então tomou um y arbitrário, $(x^2 + p + y)^2 = px^2 - qx + p^2 - r + 2y(x^2 + p) + y^2$

$$= (p + 2y)x^2 - qx + (p^2 - r + 2py + y^2), \quad (18)$$

escolhendo uma equação acima em y de modo que o segundo membro seja um quadrado, se e somente se,

$4(p + 2y)(p^2 - r + 2py + y^2) - q^2 = 0$. Logo descobrimos uma equação cúbica em y que pode ser solucionada pelo método anterior.

Portanto, podemos concluir que esses matemáticos contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento da matemática que utilizamos atualmente.

CONCLUSÃO

Este trabalho teve como resultado o esclarecimento da origem das resoluções de equações polinomiais, qual povo iniciou, quais os povos aprimoraram, ou seja, deram continuidade a essa descoberta. Quais matemáticos conseguiram realmente contribuir com essas resoluções.

Conseguiu mostrar um método simples e prático de como encontra raízes de polinômios de graus maior ou igual a 3, bastando apenas identificar se esse polinômio é uma equação recíproca de 1ª ou 2ª ordem.

E entre a discussão de quem verdadeiramente foi descobridor das raízes cúbicas de modo algébrico, ficamos sabendo que foi Nicolas Tartaglia, mas Cardano foi quem melhor, sendo reconhecido como autor dessa maravilhosa descoberta.

REFERÊNCIAS

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas, São Paulo: unicamp, 2004.

Disponível em: cct.ucs.br/eventos/outros/egem/relatos/re34.pdf

Pesquisado em: 19/10/2007

BOYER, Carl B. História da matemática. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

Disponível em: www.profcardy.com/cardicas/reciproca.php

Pesquisado em: 20/10/2007

LEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJ, David; PERIGO, Roberto.

Matemática: 3 ed. São Paulo: Atual, 2005.

Disponível em: www.algosobre.com.br/matematica/equacao-reciproca.html

Pesquisado em: 25/10/2007

DANTE, Luiz Roberto. Matemática contexto e aplicações. 2 ed. São Paulo: Ática, 2004.

Disponível em: br.geocities.com/christianjqp/artigos/equacoes.pdf

Pesquisado em: 25/10/2007