UNIVERSIDADE TIRADENTES

DAYANA RODRIGUES DE LIMA
JULIANA DA SILVA NUNES
ROSEMEIRE ALVES NUNES SANTOS

TÍTULO: A ESSÊNCIA DIVINA DO (π) PI.

Propriá

2007

DAYANA RODRIGUES DE LIMA
JULIANA DA SILVA NUNES
ROSEMEIRE ALVES NUNES SANTOS

A ESSÊNCIA DIVINA DO π (PI): PARTINDO DO ESTUDO DA ORIGEM DOS NÚMEROS ATÉ A SUA GENEALOGIA, SEU PERCURSO CRONOLÓGICO E AS CURIOSIDADES ATRELADAS A ESTE NÚMERO.

Monografia apresentada à universidade Tiradentes-UNIT como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de licenciatura em matemática.

Cassius Gomes de Oliveira

Propriá
2007

DAYANA RODRIGUES DE LIMA
JULIANA DA SILVA NUNES
ROSEMEIRE ALVES NUNES SANTOS

A ESSÊNCIA DIVINA DO (π) PI.

Monografia apresentada ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciatura plena em matemática.

Aprovada em ______/______/______
Banca Examinadora

____
Cassius Gomes de Oliveira
Universidade Tiradentes

____
Universidade Tiradentes

____
Universidade Tiradentes

Aos nossos pais e familiares que não mediram esforços para realização do nosso sonho.

AGRADECIMENTOS

Realização deste trabalho só foi possível graças:

A Deus por tudo que somos e conseguimos conquistar, sem ele nada seria possível.

À Universidade Tiradentes por proporcionar um ensino de qualidade para a nossa formação.

A todos os colegas do curso, que de forma direta ou indireta, partilharam com muita perseverança e união.

Aos professores, em especial ao professor Cassius, por mostrar muita capacidade e nos surpreender com a sua atenção, e também ao professor Moisés, que mesmo estando longe não deixou de nos apoiar e incentivar, provando que além de professor é um grande amigo.

A todos os familiares pelo amor, compreensão, estímulo e carinho que nos foi dado.

A matemática se revela em mentes sensíveis, capazes de ver uma espiral em um girassol, ângulos em uma estrela e Deus no infinito.

Manoel Paiva

RESUMO

O presente trabalho trata-se de uma abordagem voltada às particularidades de um número curioso e significante nas ciências, o número irracional π. Seu surgimento resultou numa nova visão do que é a matemática e qual o propósito dela no decorrer de nossa existência. Assim, apresentaremos conceitos que vão desde sua história a aplicações na contemporaneidade, conceitos esses que servirão de base para responder questões gerais e particulares provindas desse elemento matemático. A construção contextual baseou-se numa pesquisa bibliográfica de caráter descritivo realizado a partir de fontes secundárias, materiais já elaborados por outros como: livros, artigos científicos e pesquisas em sites da internet. O método de conhecimento mais focado foi o histórico. Diante de tudo analisamos os resultados obtidos e podemos constatar a importância do conhecimento científico e como é fascinante conhecer e refletir sobre as especificidades e teorias que envolvem o número π, para só assim chegarmos a uma conclusão. A elaboração dessa pesquisa torna acessível um estudo que tenta suprir as necessidades de conhecimento ligadas à história da matemática, particularmente ligadas ao número π. Mostrando que a descoberta do π não foi um processo fácil e linear. Muitos matemáticos dedicaram parte de suas vidas ao seu cálculo, onde cada avanço tenha muitas falhas e retrocessos. Podemos também afirmar que o cálculo de π com um grande número de casas decimais foram muito mais que um desafio. Pois com isso provou-se a sua irracionalidade, transcendência e até hoje se tenta provar a sua normalidade, que consiste na repetição de blocos de algarismos de mesmo comprimento ocorrem com igual freqüência. Dessa maneira mostramos que a importância do número π vai além de cálculos de áreas e volumes de circunferências e círculos sendo também usado em outras áreas de conhecimento.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo; número; estudo

ABSTRACT

This work talks about the peculiarities of a curious and significant number to the science, the irrational number π. It was turned to light as result for a new vision about what mathematics is and in which is its intention in our existence. So, we will show concepts from its historical beginning till its applications nowadays. These concepts will be groundwork to answer general and particular questions that come from this mathematical element. The contextual construction was based on a descriptive bibliographical research that was done using secondary sources, materials done by another people that we found in: books, scientific articles and websites. The most employed method was the historical one. With all of these things, we analyze the results and we can found the importance of the scientific knowledge and how fascinating is to know and think about the specialties and theories that involve the number π, because only this way we can take a significant conclusion. The elaboration of this research makes accessible a study that tries supply the need in mathematical knowledge linked to number π. We show that the discovery of the number π wasn't an easy and linear procedure. A lot of mathematicians spend part of their lives in this number calculation, where each step has a lot of wrong things and delays. We can also affirm that the calculation of π with a big number of decimals was very difficult. With that we prove its irrationality, its transcendence and till today is tried to prove its normally that consists in repetition of numbers at the same length at the same frequency. In this way, we show that the importance of the number π is beyond areas and circles volume calculations, and it is also used in another areas of knowledge.

PALAVRAS-CHAVE: calculations; number; study.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Buscando suprir as necessidades de maior conhecimento sobre a História da Matemática, observada como um mundo meio que “incógnito” simultaneamente indescritível para muitos. Vimos através deste trabalho, ressaltar um fascinante momento histórico contido em sua origem, A Essência Divina do π (Pi)[1] o número mais famoso da história universal. Este número de representação infinitesimal, definido como sendo a razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência.

Apesar de tudo é um algarismo pouco conhecido e relatado em livros didáticos matemáticos, por esse motivo, o interesse em aprofundar uma pesquisa foi despertado em nós.

Dessa forma tentaremos tornar um pouco mais acessível o conhecimento deste valor de representação decimal, tão cobiçado por estudiosos, que atraiu expectadores para uma nova visão do que é a matemática e qual o propósito dela no decorrer de nossa existência.

No capítulo dois iniciamos com uma breve exibição sobre o surgimento dos números e o seu conceito, o surgimento dos números racionais e irracionais. A partir disso mostraremos que o número o π (Pi) foi inserido entre os irracionais, após um grande impacto constatável de sua descoberta causando contradições de algumas hipóteses, na tentativa de encontrar sua fórmula.

Em seguida dissertaremos sobre a fascinante história desse número, enfatizando sua aplicação comensurável em outros ramos da matemática. Como também a sua cronologia e métodos que foram criados por matemáticos a fim de obter o seu cálculo, e as curiosidades

---

1-Símbolo representativo de origem Grega.

ligadas a este número.

Por fim, no capítulo quatro, daremos ênfase a um dos métodos de cálculo de π (Pi) visto como método empírico por tratar de calcular com base em experimentos aleatórios. De modo geral trata-se de uma pesquisa científica, que expressa uma abordagem racionalista metódica, a fim de confrontar teorias e pensamentos lógicos, exprimindo assim uma sinopse analítica dos fatos históricos cronologicamente mencionados nas referências coletadas bibliograficamente de livros, sites e revistas científicas, procurando realçar uma neutralidade científica e sistemática, formada por princípios e leis teóricas.

2. A ORIGEM DOS NÚMEROS

O Conceito de Número

Consiste na descoberta primitiva, de saber qual idéia torna possível a compreensão de fatores que deram início à origem da matemática. Como as definições sobre número, grandeza e forma são notavelmente observadas por meio da natureza e entendida entre as espécies, inclusive pelo homem primitivo, tais definições são também determinadas como um processo aderido da necessidade de sobrevivência das espécies, considerando que a noção de número não se confunde com a capacidade de contar, até que então para contar o homem precisaria de um esforço mental maior.

> "Darwin no Desconto of Man (1871) observou que alguns animais superiores possuem capacidades como memória e imaginação, e hoje ainda mais claro que as capacidades de distinguir quantias, tamanho, ordem e forma – rudimentos de um sentido matemático – não são propriedades exclusivas da humanidade".
>
> B. Boyer. História da matemática, p. 01.

Há experiências realizadas com pássaros, nas quais se percebeu que seu senso de contagem ultrapassa de quatro elementos.

O sentido de número trata-se de uma intuição, ou seja, o ser humano em seu estágio primitivo pôde chegar a uma idéia lógica de quantidades, pois inicialmente a única diferença que tinham conhecimento era sobre "um e muitos", e mais tarde a compreensão de elementos pares. Dessa forma, nota-se como entendiam a idéia de semelhança: narinas, orelhas, olhos, mãos e pés.

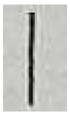
A percepção abstrata dos "homens das cavernas" os leva a recorrer à contagem, através do método de relacionar elementos de conjuntos distintos, como por exemplo: ovelhas e pedras. Esta comparação dá-se o nome de correspondência biunívoca, processo que domina toda matemática, que é sintetizada numa operação de se fazer corresponder. Partindo deste conceito, evidencia-se o avanço da espécie humana que logo após da escrita, detêm-se de uma forma significativa de linguagem passando a substituir a forma de compreensão dos números com modelos concretos, como símbolos representativos, comprovando a origem dos números que se desenvolveu em vários idiomas primitivos.

O surgimento dos números racionais

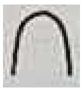
Na antiguidade, usava-se o método de agrupamento de materiais na identificação de quantidades, no entanto só se fazia possível, através deste, a identificação de valores pequenos. E as grandes quantidades o que fazer? Daí a necessidade de buscar uma representação simbólica de número.

Foi no Egito onde descobriram o mais antigo sistema de numeração por meio de símbolos. Era como um manual gravado numa pedra que se denominava "papiro de Ahmes", baseado em sete números chaves, causando incompreensão para os cientistas que o encontraram anos depois.

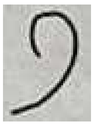
Figura 2.1 – Papiro de Ahmes escrito por Aahmesu (nome do escriba egípcio que o copiou do original cerca de 1650 a.C.), manual de matemática onde contém mais de 80 problemas, todos resolvidos.



1 Um traço vertical representava 1 unidade

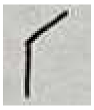


10 Um osso de calcanhar invertido representava o número 10.

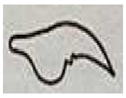


100 Um laço valia 100 unidades.

1.000 Uma flor de lótus valia 1.000



10.000 Um dedo dobrado valia 10.000



100.000 Com um girino, os egípcios representam. 100.000 unidades.

1.000.000 Uma figura ajoelhada, talvez representando um deus, valia 1.000.000.

Esta descoberta facilitou os cálculos que envolvia números inteiros. Os Egípcios utilizavam uma técnica especial de contar, na qual resolviam as quatro operações por meio da soma. Por exemplo, na multiplicação 13*9 indicava que o numeral 9 deveria ser adicionado treze vezes.

Logo em seguida os Romanos inventaram o seu próprio sistema de numeração, que conhecemos nos dias de hoje, onde tentaram se diferenciar dos egípcios fazendo uso das próprias letras do alfabeto, não tendo a preocupação de inventar símbolos.

Figura 2.2 – Pedra escrita com numeração romana.

Mas, a influência mais admirável na trajetória da formação do nosso atual sistema de numeração foi a da civilização Hindu, juntamente com a introdução do zero, denotado uma posição vazia dentre os algarismos.

Contudo é graças aos árabes que devemos a divulgação deste sistema, em particular a um árabe matemático Al-Khowarizmi, batizando nosso tão usado sistema decimal de algarismo indo - arábicos, tornando os cálculos mais rápidos e seguros.

Criados partindo da necessidade de contar elementos da natureza, por esse motivo também conhecidos como números naturais, facilitando os cálculos fracionários, na aplicação da razão, que matematicamente falando, trata-se da divisão de dois números naturais e inteiros mais conhecidos como simetrizáveis, composto por positivos e negativos, nomeados de números racionais.

O surgimento dos números irracionais

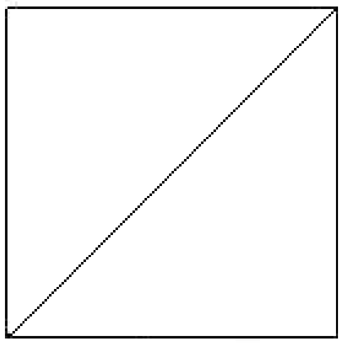
Empregados como meio de contar, medir e calcular, os números racionais despertou no homem a indigência em explorá-lo. Toda essa veneração com os números, criou a Teoria dos Números[2], um dos ramos mais importantes da matemática.

2- Surgiram a cerca de 600 a.C., quando Pitágoras e seus discípulos começaram a estudar as propriedades dos números inteiros.

"Os pitagóricos rendiam verdadeiro culto místico ao conceito de número, considerando-o essência das coisas."

Como era de tal grandiosa descoberta, os números causaram grande impacto, fazendo-se acreditar na antiguidade que tudo na natureza e no universo estivesse relacionado com os números racionais, já que tudo onde os usava resultava em respostas evidentes.

Mas, foi na tentativa de calcular a diagonal do quadrado de lado igual a 1, que fez um dos discípulos de Pitágoras, inquietar-se na resolução à partir do teorema de Pitágoras.



1 m

$$h^2 = a^2 + b^2$$
$$h^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h^2 = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h = \sqrt{2}\ m$$

Figura 2.3 – Cálculo da diagonal do quadrado de lado igual a 1cm.

"A medida da área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual a soma das medidas das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos".

Antônio Marmo Oliveira e Agostinho Silva

Partindo desta descoberta quebra-se toda harmonia do universo, referente aos racionais, já que como representado pelo método de Pitágoras, a diagonal de um quadrado de lado 1 não era a razão de dois números inteiros(atualmente dois números racionais). Não podendo negar, tal descoberta, a raiz de 2 foi a primeira imperfeição divina, denominado mais tarde de número irracional.

Classificação dos Números Irracionais.

Números reais algébricos irracionais

Apesar da $\sqrt{2}$ ter sido descoberta como um número que representava a diagonal do quadrado de lado 1 a partir do teorema de Pitágoras, somente um século mais tarde foi divulgada pelos intelectuais da época, que perceberam que a $\sqrt{2}$ não poderia ser um número racional por não poder ser escrito como quociente de dois números inteiros.

Mesmo assim, foi somente em 1872 que os números irracionais entraram na Aritmética em termos rigorosos pelo matemático alemão Dedekind.

Figura 2.4 – Matemático alemão Richard Dedekind (1831-1961).

Neste sentido o número irracional resultante da $\sqrt{2}$ é um número algébrico irracional por ser raiz de polinômio com coeficientes inteiros.

Aristóteles (384-322 a.C.), como por exemplo, de uma demonstração por redução ao absurdo, demonstrou que a raiz quadrada de dois não é um número racional, isto é, não se pode escrever como uma fração de dois números inteiros.

Por absurdo, suponha-se que existam dois números naturais ***p*** e ***q*,** primos entre si, tais que $x = \frac{p}{q}$ (isto é, suponhamos a fração escrita na forma irredutível) e $x^2 = 2$. Então $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ sendo p^2 um número par (porque $p^2 = 2q^2$) e consequentemente, *p* também é par (porque se fosse ímpar seria $p = (2k + 1)$ para algum número natural *k e* $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, que seria ímpar).Se *p* é um número par, existe um natural *k* tal que $p = 2k$ e assim $(2k)^2 = 2q^2 \Leftrightarrow 2k^2 = q^2$. Então *q* seria par (porque q^2 é par), o que é absurdo visto que *p* e *q* são primos entre si. Concluímos finalmente que se raiz quadrada de dois fosse um número racional, então este número seria uma fração que não tem forma irredutível. Isto é um absurdo e, portanto $\sqrt{2}$ tem que ser um número irracional. Como queríamos demonstrar.

Números reais transcendentes.

Nesta segunda classificação dos números irracionais, ao contrário da primeira, não são raízes de polinômios com coeficientes inteiros e por esse motivo denominam-se de números reais transcendentes. Várias constantes matemáticas são transcendentes, como o número π (PI) e o número de Euler ($\underline{e}$). Iremos mostrar alguns dos números irracionais mais conhecidos:

$\underline{e}$	$\underline{\Phi}$	$\underline{\pi}$

O número ***e*** é designado número de Euler, em homenagem ao matemático Leonhard Euler.

Figura 2.5 – Retrato do matemático Leonhard Euler (autoria de Johann Georg Brucker).

Também é conhecido por outros nomes, como: número exponencial, número neperiano, número de Napier, etc. Pois a primeira referência à constante foi publicada em 1618 na tabela de apêndice de um trabalho sobre logaritmos de Jonh Napier. Esse número é à base dos logaritmos naturais e surge como limite, para valores muito grandes de n para a seguinte expressão:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

e vale aproximadamente 2,718 281 828 459 045 235 360 287. O número também pode ser escrito como soma da série infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdots$$

Esta série é calculável uma vez que seus termos decrescem muito rapidamente. E por esse motivo a sua irracionalidade foi demonstrada por Lambert em 1761 e mais tarde por

Euler. Por ser um número irracional e transcendente é estreitamente aparentado com o número π (PI). Euler de forma elegante relaciona o número e com as funções trigonométricas na sua relação:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \text{ onde } x = \pi, \text{ temos:}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

O número ***e*** é muito importante em quase todas as áreas do conhecimento, como por exemplo: economia, engenharia, biologia e sociologia. Sua utilização aparece principalmente na resolução de equações em as incógnitas surgem com expoente.

Outro irracional muito conhecido é o "**número de ouro**", representado pela letra grega Φ (Phi maiúsculo), a designação adotada para esse número é a inicial do nome do arquiteto grego Fhideas[3].

Na tentativa de estabelecer proporções, é que se chegou ao número de ouro, pois este número surge numa infinidade de elementos da natureza em forma de razão, e por esse motivo é chamado de "proporção divina" e também considerado por muitos como uma oferta de Deus ao mundo.

A proporção divina ou quociente dourado equivale a:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618033989$$

3 - Fhidias foi escultor e arquiteto encarregado da construção do Páternon grego.

O número 0,618033 é chamado de Secção Áurea e é o inverso do Número de Ouro. O que pose ser verificado aplicando a propriedade do elemento inverso da multiplicação:

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}=\frac{5-1}{4}=1$$

$$(1.618033).(0{,}618033)=ou\,\Phi.\,\frac{1}{\phi}=1$$

Diversos polígonos podem ser construídos obedecendo a “lei da divina proporção”, tais como: triângulo, retângulo, pentágono, decágono. Inclusive Euclides, no seu livro “Elementos”, chama esta divisão de “o quociente do extremo e da média”, usando-o para construir o primeiro pentágono regular.

Um exemplo desta maravilha é o fato de que se desenharmos um retângulo cujos lados tenham uma razão entre si igual ao número de Ouro, e este pode ser dividido num quadrado e em outro retângulo em que se têm neste também a razão entre os dois lados igual ao número de Ouro. Este processo pode ser repetido indefinidamente mantendo-se a razão constante.

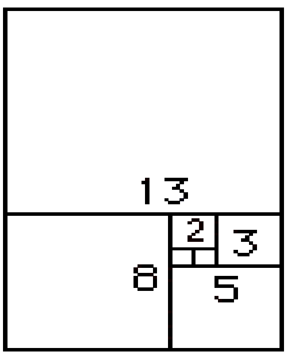


Figura 2.6 – Retângulo cujos lados têm razão entre si igual ao número de Ouro.

O Papiro de Rhind (Egípcio) refere-se a uma “razão sagrada” que se crê ser esse número. Levando em conta esses fatos, foi o primeiro irracional de que se teve consciência, inclusive muito usado antiguidade pelos Egípcios na construção das pirâmides e em estátuas e templos gregos como o de Páternon Grego[4].

Também em outros ramos da Arte, este número aparece, inúmeras vezes ligado a uma concepção estética. Um exemplo é a tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo da Vince, que foi baseada nos pentágonos, estrelado e regular, inscritos na circunferência.

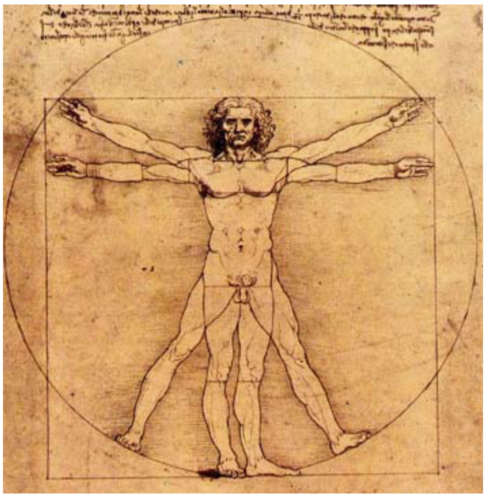


Figura 2.7 – Tradicional representação do homem em forma de estrela de cinco pontas de Leonardo da Vince.

É dito que encontraremos o Número de Ouro onde houver “harmonia”, por ser indicado como a máxima expressão da harmonia e equilíbrio.

O último irracional que iremos apresentar representa na matemática a relação entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. O Pi é representado pela letra grega π e tem valor aproximado de:

4- Templo de Atenas dedicado a Minerva e aposento de donzelas entre os antigos gregos.

$$\pi \approx 3{,}141593$$

Várias civilizações antigas realizaram cálculos importantes para determinação de uma aproximação de π (PI). Matematicamente falando, se considerarmos c como o comprimento de uma circunferência e d como o diâmetro, temos o seguinte cálculo.

$$\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi . d$$

A irracionalidade de π foi demonstrada em 1767 por Johann Heinrich Lambert, mas antes de ser provado esse fato, vários matemáticos buscaram por anos comprovar a racionalidade do número, ou seja, tentar descrevê-lo como uma forma de razão $\pi = p/q$ onde p e q são números inteiros. Com os estudos matemáticos sobre a irracionalidade de π, foi obtido também que ele é um número transcendente, ou seja, não pode ser obtido diretamente através de nenhuma função polinomial de coeficientes inteiros ou racionais do qual π seja uma raiz.

Como π não pode ser escrito da forma a/b com *a* e *b* inteiros, a prova da sua irracionalidade se faz por absurdo. Suponha que $\pi^2 = \frac{a}{b}$ com *a* e *b* inteiros positivos e escolha *n* suficientemente grande de forma que:

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1$$

Defina *f*(x) como um polinômio de grau 2n:

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$$

Usando um o binômio de Newton, vale:

$$f(x) = \frac{x^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-x)^j = \frac{1}{n!}\sum_{j=o}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j x^{n+j}$$

Seja $f^{(s)}(x) = \frac{d^s f}{dx^s}$ a s-ésima derivada de f(x).

- Se $0 \le s \le n-1$, temos:

$$f^{(s)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j \frac{(n+j)!}{(n+j-s)!}x^{n+j-s} \Rightarrow f^{(s)}(0) = 0$$

- Se $n \le s \le 2n$, temos:

$$f^{(s)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{j=s-n}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j \frac{(n+j)!}{(n+j-s)!}x^{n+j-s}$$

$$f^{(s)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{s-n}(-1)^{s-n}s! = (-1)^{s-n}\frac{s!}{n!}\binom{n}{s-n} \in \mathbf{Z}$$

- Se $n > 2n$, temos:

$$f^{(s)}(x) = 0$$

Observe ainda que $0 < f(x) < \frac{1}{n!}, \forall x \in (0,1)$ e que $f(x) = f(1-x)$

Agora defina:

$$F_n := b^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \pi^{2n-2j} f^{(2j)}(x)$$

Observe que:

$$b^n \pi^{2n-2j} = b^n \frac{a^{n-j}}{b^{n-j}} = a^{n-j} b^j \in \mathbf{Z}$$

E, portanto $F(0) = F(1) \in \mathbf{Z}$ $\quad \frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin \pi x - \pi F(x)\cos \pi x\right]$

$$= \left[F''(x)\sin \pi x + \pi F'(x)\cos \pi x - \pi F'(x)\cos \pi x + \pi^2 F(x)\sin \pi x \right]$$
$$= \left[F''(x) + \pi^2 F(x) \right] \sin \pi x$$

$$F''(x) = b^n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \pi^{2n-2j} f^{(2j+2)}(x) = b^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \pi^{2n-2j} f^{(2j+2)}(x)$$

$$= b^n \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \pi^{2n-2j+2} f^{(2j)}(x)$$

Mas, portanto:

$$\frac{d}{dx}\left[F'(x)\sin \pi x - \pi F(x)\cos \pi x\right] = \pi^2 b^n \pi^{2n} f(x)\sin \pi x = \pi^2 a^n f(x)\sin \pi x$$

Assim, aplicando o teorema fundamental do cálculo:

$$J := \int_0^1 \pi^2 a^n f(x)\sin \pi x = \left[F'(x)\sin \pi x - \pi F(x)\cos \pi x\right]_0^1 = \pi\left[F(1) + F(0)\right]$$

Mas como $0 < f(x) < \dfrac{1}{n!}$ em (0,1), temos:

$$\int_0^1 \pi^2 a^n f(x) \sin \pi x \le \frac{\pi^2 a^n}{n!}$$

e assim: $0 < F(0) + F(1) = \dfrac{J}{\pi} < \dfrac{\pi a^n}{n!} < 1$

Um absurdo, pois não existe número inteiro maior que zero e menor que 1.

Provamos então que não só π é irracional como também π^2 é.

3. O Número Irracional π (PI).

A História do π (PI).

Desde a antiguidade o número π **(PI)** ocupa um lugar especial na matemática. Matemáticos, no Egito antigo descobriram que a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro é a mesma para qualquer circunferência, dessa forma particularmente foi representado a fascinante definição do **π.** Desde então, quase todos os grandes nomes da matemática lhe dedicaram parte de sua atenção. Por isso iremos, embora de forma sucinta, retratar desde sua genealogia a curiosidades ligadas a este número.

> "Fez também o mar de fundição, redondo, de dez côvados duma borda a outra até a outra borda, e de cinco de alto; e um fio de trinta côvados era a medida de sua circunferência."
>
> **Velho testamento (I Reis 7:23)**

Esta descrição bíblica torna possível o valor de π **(PI) =** 3, da forma:

$$P = 2\pi \mathbf{r} \leftrightarrow \mathbf{30 = 2}\pi \times 5 \leftrightarrow \mathbf{30 = 10}\,\pi \leftrightarrow \pi = 30/10 \leftrightarrow \pi = 3$$

É importante mencionar que historicamente, muito antes que os povos da antiguidade tivessem consciência do que a matemática representava, já havia vestígios de tentativas em busca da razão entre o perímetro e o diâmetro da circunferência, por este motivo o π (PI) detém de um grande percurso cronológico desde seu primeiro encontro com a humanidade, provocando a dedicação de vidas de parte dos matemáticos da época em busca da precisão do seu valor.

Porém neste período da história já se sabia que a determinação do π **(pi)** era um intervalo entre 3 e 4, encontrado numa tabela de origem babilônica (1800 a.C.), nesta estava indicada a fórmula com escrita cuneiforme sem explicação sobre sua origem e sem notação algébrica.

$$p = \left[3 + \frac{1}{8}\right] \times d \text{ , donde resolve que } \pi = \frac{p}{d} = 3 + \frac{1}{8} = 3{,}125 \text{ .}$$

Desde o médio Oriente, precisamente em território do antigo Egito e Babilônia, já se tinha conhecimento, apesar de remotos, sobre o valor de "Pi". Os Babilônios determinaram como sendo π=3 1/8 e os Egípcios $\pi=\left(\frac{16}{9}\right)^2$, esses conceitos eram obtidos de forma empírica, em conseqüência de suposições como: A partir do desenho de uma circunferência na areia, representava-se sobre uma corda unidades de comprimento igual ao do diâmetro [AB] da circunferência (ver fig. 3.1) e o perímetro, visto como sendo a medida de uma corda contornando à circunferência. Obtendo-se assim os pontos A,C,D e E marcados sobre o contorno, ignorando o arco AE, percebemos que o comprimento da circunferência é de três unidades.

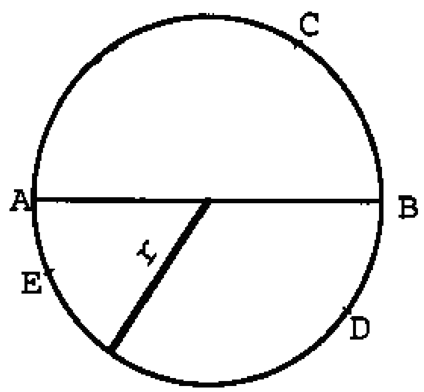


Figura 3.1 – Modelo de circunferência estudada para o cálculo de área.

Assim, se colocarmos o arco [AE] sobre o diâmetro [AB], constatamos que o diâmetro da circunferência cabe em [AB] entre 7 a 8 vezes o arco. Dessa forma apesar do modo não científico, concluí-se que:

$$3.\frac{1}{8} < \pi < 3.\ \frac{1}{7}$$

Os egípcios diferente de outros povos para determinas o valor de π(PI), fez uso método da decomposição comparando o paralelogramo com o retângulo(ver figura 3.2), método esse comprovado que determina a área de um círculo, cuja área é igual A= $2\pi r^2$.

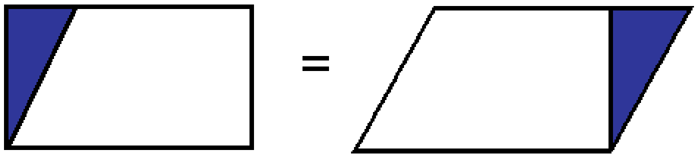


Figura 3.2 – O método da decomposição permite verificar que as áreas do paralelogramo e retângulo são iguais.

Utilizando o método, percebemos que a área do círculo terá que ser duplicada para transformá-la em um paralelogramo de base $2\pi r$ e altura r (como mostra a figura 3.3), confirmando a autenticidade do método de comparação em afirma que o retângulo tem mesma área do paralelogramo (ver figuras 3.4 e 3.5).

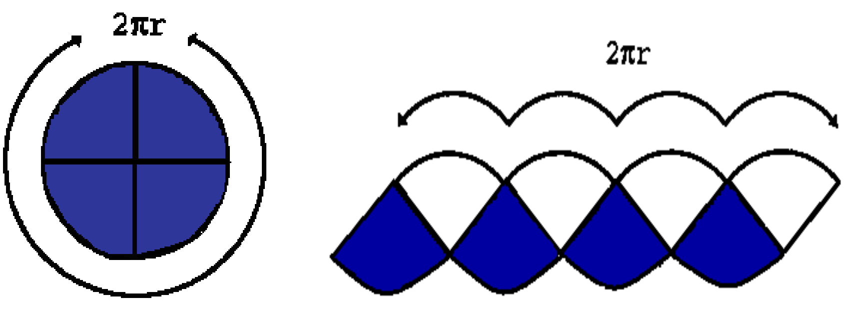


Figura 3.3 – Área do círculo transformada em área dupla do círculo.

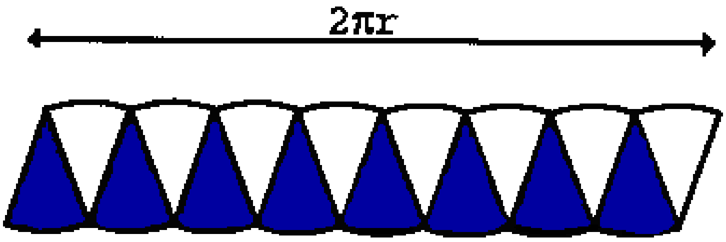


Figura 3.4 – Área dupla do círculo representa um paralelogramo.

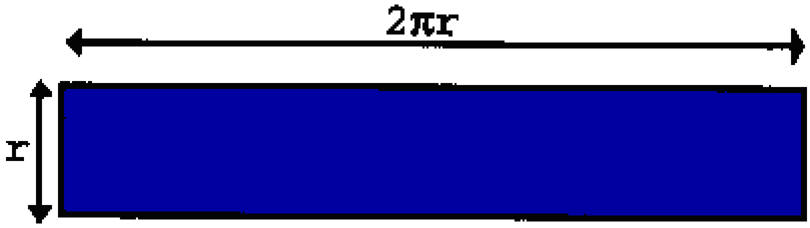


Figura 3.5 – Mostrando que o paralelogramo é igual ao retângulo.

Partindo dessa suposição é que os egípcios obtiveram o valor de π. Onde destacaram essas afirmações no papiro de Rhind nos problemas número 50 (onde calcula e valor de "Pi", e no problema número 48 que assume área do círculo com 9 unidades de diâmetro igual a área do quadrado de 8 unidades de cada lado. Como calcula da forma a seguir:

"Como se pode observar na figura 3.6, a área do octógono irregular [ABCDEFGH] é aproximadamente igual à do círculo de raio 9. Como a sua área é igual a sete quadrados de três unidades de lado, o que faz 63 unidades de área, então conclui-se que a área de um círculo de raio 9 é próxima da de um quadrado de lado 8[3]".

Então, o valor usado pelos egípcios por muito tempo presume-se em:

$$\pi\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2 \text{ donde } \pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}160493827\ldots$$

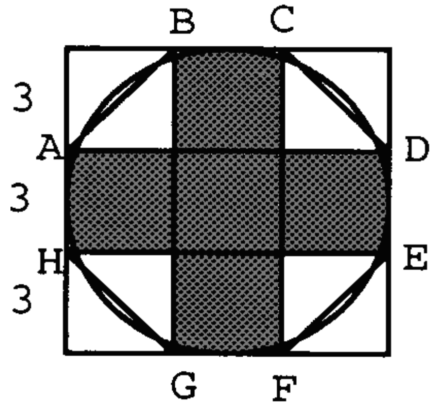


Figura 3.6 – Método egípcio para o cálculo da área de um círculo, descrito no papiro de Rhind.

É pelo cientista Arquimedes de Salmos à partir de suas pesquisas, que inicia-se o primeiro método cientificamente comprovado de calcular o π (Pi). Ocasionando dessa forma, somente no século XVIII, o reconhecimento do número π (Pi), como a representação da razão entre o perímetro do círculo pelo seu diâmetro. Mais tarde muitas civilizações como: Egípcios, Gregos e Chineses, buscavam a sua resolução ou de uma seqüência padrão que se repetisse.

Cronologia do π (PI) e seus dígitos.

Foram os avanços da teoria matemática e da tecnologia, que se permitiu ao longo dos anos o progresso no cálculo de "Pi". Nesta cronologia que iremos apresentar, tentaremos de forma clara mostrar a diferença no cálculo entre as civilizações e a aceleração em relação ao número de dígitos com maior ou menor precisão.

c. 2000 a.C. Babilônios utilizavam π=3 1/8, esse valor deduz-se de uma das placas de Susa[5] . Neste período, os egípcios usam π=(256/81)=3,1605, valor encontrado no Papiro de Ahmes ou Rhind.

c. 1100 a.C. Os chineses utilizavam π=3, valor encontrado por eles na busca de uma melhor precisão.

c. 550 a.C. O Antigo Testamento empregam π=3, possivelmente encontrado por medição sem caráter científico, esse valor foi empregado como descrição do templo.

c. 240 a.C. Arquimedes suspeitando que π não era racionalmente determinável, utilizou-se de processos geométricos gerais, baseados nos polígonos regulares inscritos e circunscritos, determinam que 3 10/71<pi<3 1/7.

c. 150 d.C. Cláudio Ptolomeu representa π=3° 8' 30'=377/120=3,14166, esse valor foi obtido através de uma tábua de cordas, a mesma fornece os comprimentos das cordas de um círculo correspondentes aos ângulos centrais de 0° e 180°.

Séc. III d.C. ou precisamente em 300 d.C. Wang Fau utiliza π=142/45=3,1555.... e também em 263 d.C. Liu Hui emprega π=157/50=3,14.

c. 480 O mecânico Chinês Tsu Ch'ung-chih, chegou a uma interessante aproximação racional 355/113=3,1415929...

c. 530 Aryabhatas um dos mais antigos matemáticos hindus, representou 62832/20000=3,1416. Talvez, esse resultado tenha sido obtido de antigas fontes gregas, ou do cálculo do perímetro de polígono regular inscrito de 384 lados.

c. 650 Brahmagupta utiliza pi=3,162...

1220 Leonardo de Pisa (Fibonacci) descobre π=3,141818...

5- Pequenas placas de argila contendo registros matemáticos encontradas na cidade de Susa, localizada a 250 km a oriente do Rio Tigre

1429 Al-Kashi, deu uma aproximação de π até a décima sexta casa decimal, através do método clássico.

1579 O matemático francês Fraçois Viète, com base no método clássico, encontrou π corretamente até a nossa casa decimal.

1585 Adriaen Anthoniszoon, mostrou que 377/120>π>333/106.

1593 O holandês Adraen Van Roomen, através do método clássico, determinou π corretamente até a décima quinta casa decimal.

1610 O holandês Ludolph Van Ceulen, dedicou grande parte de sua vida em calcular o π, chegando até a trigésima quinta casa decimal pelo método clássico.

1621 O físico holandês Willebrord Snell, descobriu um aperfeiçoamento trigonométrica do método clássico de calcular π. Através disso conseguiu obter as trinta e cinco casas decimais de Van Ceulen.

1630 Grienberger, usando o método de Snell, calculou π até a trigésima nona casa decimal.

1650 O matemático inglês Jonh Wallis obteve a curiosa expressão: $\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8}{1.3.3.5.5.7.7}$.

1671 O matemático escocês James Gregory obteve a série infinita:

arctg $x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots (-1 \le x \le +1)$.

1699 O inglês Abraham Sharp descobriu 72 dígitos, com a série do arco tangente de Gregory Leibniz.

1706 O astrônomo inglês John Machin, foi o primeiro a calcular π com mais de 100 casas decimais.

1719 O matemático francês Thomas Fantet de Lagny obteve corretamente 112 casas decimais usando a série de Gregory para $x = \sqrt{1/3}$.

1767 Johann Heinrich Lambert provou que π é irracional.

1794 Adrien – Marie Legendre mostrou que π^2 é irracional.

1844 Usando a série de Gregory, o calculista Zacharias Dose encontrou π corretamente até a ducentésima casa decimal.

1853 Rutherford retornou ao problema e conseguiu corretamente 400 casas decimais.

1873 Usando a fórmula de Machin, o inglês William Shanks, calculou π com 707 casas decimais.

1882 F. Lindemann provou que π é transcendente.

1948 Em janeiro deste ano, Ferguson e Wrench publicaram juntamente um valor correto de π com 808 casas.

1949 O ENIAC, computador eletrônico do Army Ballistic Research Laboratories de Aberdeen, Maryland, calculou 2037 algarismos de π.

1954, através do computador NORC são atingidos os 3089 dígitos de π.

1959 François Genuys, usando um IBM 704, obteve π com 16167 casas decimais.

1961 Wrench e Daniel Shanks calcularam π com 100265 casas decimais usando um IBM 7090.

1966, em 22 de fevereiro deste ano, M. Jean Guilloud, juntamente com alguns colegas pesquisadores, chegaram a uma aproximação de π que atingia 250000 dígitos, num computador STRETCH.

1967 Os mesmos pesquisadores usando um CDC 6600, obtiveram uma aproximação de π com 500.000 casas.

1973 Usando CDC 7600, Guilloud e seus colegas encontraram uma aproximação de π com 1.000.000 de casas decimais.

1981 Os dois matemáticos japoneses Kazunou Mujoshi e Kasuhika Nakayama calcularam π com 2.000.038 algarismos.

1986 D. H. Bailey da Nasa, através de um supercomputador Cray – 2 obtiveram π com 29.360.000 dígitos. Logo após, Yasumasa Kanada, usando um NEC SX – 2 e o algoritmo dos Borwein calculou π com 137.217.700 dígitos.

1988 Kanada computa 201.326.000 dígitos num Hitachi S – 820, em seis horas.

1989 Os irmãos Chudnovsky acham 480 milhões de dígitos; Kanada calcula 536 milhões de algarismos; os Chudnovsky calculam 1 milhar de milhão de dígitos.

1995 kanada computa 6 mil milhões de dígitos.

1996 Os irmãos Chudnovsky computam mais de 8 milhares de milhão de dígitos.

1997 Kanada e Takahashi calculam 51,5 milhares de milhão (3Y234) de dígitos num Hitachi SR2201, em pouco mais de 29 horas.

Com essa cronologia, concluímos que o cálculo de π (Pi) com um grande número de casas decimais não se limita apenas no desafio envolvido. Inicialmente foi a procura para determinar um valor exato para π (Pi), hoje em dia é conseguir informações estatísticas referentes a “normalidade” de “pi”, que se daria se todos os dez algarismos ocorressem com igual freqüência. Além disso, calcular “Pi” com grande número de casas decimais, leva a se ter melhor habilidade em programação de computadores como também utilizar esses cálculos como testes na construção de computadores cada vez mais avançados.

Curiosidades sobre o π (PI).

Baseando no estudo do conceito do π (PI), alguns estudiosos ou interessados em se destacar, apresentam inúmeras curiosidades das quais algumas atreladas a verdadeiras teses que partem de definições do π (PI), outras embora, são apenas artifícios de ligação com outros ramos do conhecimento. Formas representativas diferentes, para não dizermos absurdas.

> “Sim, é útil e fácil memorizar um número grato aos sábios.
> Até a nado a Maria encontrou a margem, peixe bem lindo.
> Vai a aula o aluno aprender um número usado nos arcos”

Se contarmos a quantidade de letras de todas as palavras obterá o valor de π (PI). Eram elaborados poemas e mnemônicas[6], com propósito de decorar a quantidade de casas decimais aleatoriamente expressas.

> “O valor de π (PI) correto com dez dígitos decimais foi usado no cálculo do comprimento da linha do equador terrestre”.

> “O número π (PI) exerce um papel muito importante na Matemática e nas Ciências, predominante quando determinamos perímetro, áreas, centros de gravidade, informações sobre segmentos e setores circulares e elípticos, inclusive em cálculos de navegação, etc.”.

> “O número π (PI) foi também fonte de inspiração para músicas. Através do uso dos seus dígitos ou outros cálculos envolvendo o π (PI) foram criadas algumas melodias. Já existiram inúmeras tentativas de codificações dos dígitos de π (PI), visando a sua aplicação musical”.

6- Palavra adjetiva que significa algo que se refere à memória ou que facilmente se grava na memória.

"O cálculo do Pi com milhões de casas decimais é usado para testes em computadores e programas (Hardware e Software para diferença em um dos algarismos indica falha nas arquiteturas)".

"A importância atribuída ao número π (PI) chega mesmo a áreas como busca de vida extraterrestre. Com efeito, são enviadas para o espaço, através de ondas eletromagnéticas, seqüência dos dígitos conhecidos do número π (PI), com a intenção de que "alguém" nos "ouça" por esse Universo a fora e nos responda".

Visto que os algarismos de π (PI) não obedecem a qualquer padrão, a memorização de seus números como também o cálculo de mais e mais casas decimais, fez com que π (PI) se tornasse um numero ideal para exibição de talentos.

Métodos de Cálculo.

Método do Cálculo de π (PI) por Arquimedes.

Arquimedes era um grande matemático reconhecido e de certa forma considerado um gênio por muitos, era um grande matemático do século III a.C. e considerado um gênio por ser um excelente físico conhecido pelas suas façanhas experimentais, engenheiro e técnico em ampliar conquistas de grandes matemáticos como Pitágoras, Tales de Mileto, Árquitas de Tarento, Eudoxo e Euclides, além de possuir grande curiosidade de como se funcionavam tais descobertas fabricava aparelhos para testes de suas próprias pesquisas e de tantos outros que sentisse necessidade de uma prova mais concreta para demonstração das descobertas. Por esse motivo tornou-se o auge ciência grega e o primeiro a desenvolver o método experimental nas ciências físico-matemáticas.

Estudou o equilíbrio dos sólidos o e movimento dos corpos celestes procurando sempre formas práticas e concretas para demonstrar seus trabalhos se destacava como um extraordinário engenheiro.

Figura 3.4.1 – Matemático grego (287-212 a.C.). Um dos maiores matemáticos de todos os tempos, inventou a hidrodinâmica, ciência que estuda a dinâmica dos fluidos.

Foi por Arquimedes a primeira demonstração cientifica do valor de π (Pi), teoricamente esse método realizado determina que o número π (Pi) estaria delimitado pela equação $223/71< \pi<22/7$. Para chegar a essa tese nosso gênio baseou-se no fato que, a largura da circunferência está compreendida entre o perímetro de um polígono regular, fazendo uso do método da quadratura do círculo.

De modo geral, naquela época considera-se a "quadratura do círculo" o mais famoso problema da história da Matemática. Quando a Geometria ainda engatinhava, já se havia estabelecido a possibilidade de medir a área de qualquer figura cercada por segmentos de reta (poligonais).

A resolução através do método de Arquimedes é perceptível, porém ocorre muito lentamente para π (Pi).

O método é constatado primeiramente através de um círculo inscrito no hexágono regular, calculou os perímetros dos polígonos obtidos dobrando sucessivamente o número de lados até chegar a um polígono de 96 lados. Com esse perímetro calculado, ele definiu que o valor de π estaria entre 3,1408 e 3,1428.

Historicamente Arquimedes em seus estudos admite que a medida *L*, representada como sendo o comprimento da circunferência, está compreendida entre a medida de P e a medida de p ($P < L < p$), portanto demonstraremos partindo do conceito de Arquimedes que o número π, definido como a razão $\frac{L}{D}$, está seguramente entre 3 e 3,47. A respeito sobre do valor aproximado de π (Pi), não compreendemos se foi por falta ou excesso, para o cálculo de π (Pi), utilizava o quociente entre o perímetro do polígono regular inscrito em uma circunferência e a medida do diâmetro, e, além disso, o quociente entre o perímetro de um outro polígono circunscrito na mesma circunferência pela medida do diâmetro, conforme segue figura.

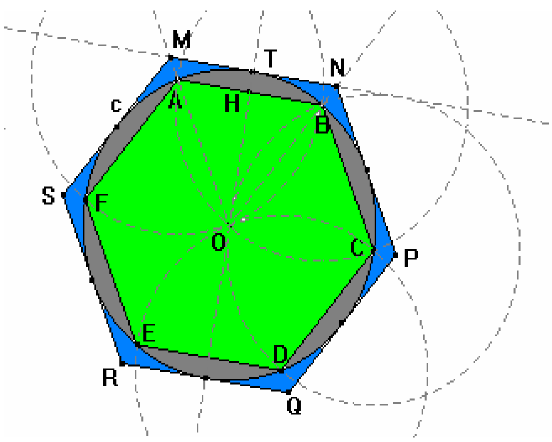


Figura 3.4.2 – Ilustração do hexágono regular com a circunferência inscrita e outro hexágono inscrito na circunferência.

Desta forma seguindo seu conceito para um hexágono regular temos que seu perímetro é **6 x *r***, ou seja, seis vezes o raio da circunferência e que a medida do apótema do hexágono é $\frac{r\sqrt{3}}{2}$, para determinamos a medida do lado hexágono circunscrito podemos aplicar o teorema de Tales no triângulo *OHA* e *OTM* chegando na proporção $\frac{OH}{OT} = \frac{r/2}{R/2} = \frac{r}{R}$, ou seja, a razão entre a medida dos lados do hexágono inscrito e a medida dos lados do hexágono circunscrito que é igual ao lado do hexágono circunscrito será $\frac{OH}{OT} = \frac{\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ sendo então seu perímetro $\frac{r}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

Concluímos desta forma o que fez Arquimedes naquela época conseguindo provar cientificamente que o número π (Pi) estaria entre 3 e $2\sqrt{3}$ ou seja entre 3 e 3,4.

Método das séries infinitas.

O método de séries infinitas, também foi utilizado no cálculo do π (PI). Dessa maneira, relataremos as contribuições de alguns matemáticos com a utilização desses métodos.

Figura 3.4.3 - Retrato do matemático François Viète (1540 a 1603)

O primeiro que iremos ressaltar, é o matemático François Viète, nascido em 1540 em Fontenay-le-Comte, na França. Seus trabalhos matemáticos são relacionados proximamente à sua cosmologia e trabalhos na astronomia. Em 1571 publicou o “Caron mathematicus”, que devia servir de introdução trigonométrica a seu “Harmonicon coeleste”, o qual nunca foi publicado. Vinte anos depois publicou “In artem analyticum isagoge”, que foi o mais antigo trabalho sobre álgebra simbólica. Em 1593 François Viète, após ter fundado a álgebra, traduziu o método de Arquimedes numa fórmula algébrica para π (PI):

$$\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\ldots = \frac{2}{\pi}$$

Figura 3.4.4 - Retrato do matemático John Wallis (1616 a 1703)

John Wallis foi o matemático inglês mais influente antes de Newton, além de um importante historiador da matemática. Wallis publicou Treatese on Álgebra, neste livro aceita raízes negativas e raízes complexas, representando uma enorme riqueza histórica.

Walis contribuiu intensamente para a origem do cálculo. Dentre os seus mais importantes estudos, constatam-se em 1655 o desenvolvimento da seguinte série infinita para aproximação de π (PI):

$$\frac{2}{1}.\frac{2}{3}.\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{6}{5}.\frac{6}{7}.\frac{8}{7}.\frac{9}{9}... = \frac{\pi}{2}$$

Leibniz (como era conhecido) viveu entre os anos (1646 a 1716) na Alemanha, era um matemático muito reconhecido e considerado um gênio em outras áreas de conhecimento como: história, política, lógica, metafísica, filosofia, etc. Esse reconhecimento era atribuído por causa das suas grandes descobertas. Dentre elas um modelo que é o precursor teórico da computação moderna: "a arte combinatória" (que é assunto de análise combinatória como é conhecida até os dias de hoje).

Figura 3.4.5 - Retrato do matemático Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646 a 1716)

Além destas, houveram outras descobertas importantes reconhecidas, como: "o teorema fundamental do cálculo", "a teoria ondulatória da luz" e a criação de uma máquina calculadora com quatro operações.

O matemático Gottfried Wilhelm Von Leibniz deu sua contribuição para o cálculo do π (Pi) desenvolvendo mais uma série infinita em 1682, que se trata de uma série alternada de termos infinitos, onde chega a uma igualdade de $\frac{\pi}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

Poucos anos mais tarde o matemático Johann Heirich Lambert que viveu entre os anos (1728 a 1777) natural da França, demonstrou interesse pelo cálculo de π (Pi). Foi autor de trabalhos inovadores sobre "geometrias não euclidianas" e desenvolveu através da geometria da regra7 o cálculo da "trajetória de cometas".

Figura 3.4.6 - Retrato do matemático Johann Heirich Lambert (1728 a 1777)

Por ser o autor da demonstração de que π (Pi) é um número irracional, dois anos mais tarde publicou uma série na forma de divisões infinitas para aproximação de π (Pi).

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cfrac{5^2}{11 + \cfrac{6^2}{\ldots}}}}}}$$

7 - Como os cálculos de aritmética se relacionam com operações e geometria.

Método de cálculo numérico.

O método de Newton (ou método de Newton-Raphson) é mais um para obtenção de aproximações de π (Pi). Por ele, podemos obter através de aproximações sucessivas, as raízes de uma função f(x) = sin(x) onde conhecemos, analiticamente, sua derivada f'(x) obtendo como ponto de partida para realizar essa análise pontos próximos dessas raízes.

Partindo de pontos ***a*** e ***b***, onde f(***a***) < 0 e f(***b***) > 0, denominado um intervalo onde a raiz de f(x) = 0 Є [***a,b***]. Inicialmente temos um intervalo π Є [3,4] esse método permite refiná-lo sucessivamente para os intervalos:

1. π Є [3, 3.5]
2. π Є [3, 3.25]
3. π Є [3.125, 3.25]
4. π Є [3.125, 3.1875] e assim sucessivamente.

Para obter essas aproximações sucessivas para a raiz da função f(x) = sin(x), o método de Newton – Raphson consiste de:

i) Atribuir um valor inicial x_0 próximo a raiz desejada da função f(x).

ii) Calcular $x_{i+1} = x_i - \frac{f(xi)}{f'(xi)} = x_i - \frac{\sin(xi)}{\cos(xi)} = x_i - \frac{\sin(xi)}{\cos(xi)} = x_i - \tan(x_i)$ **(1)**, resultando a partir da inicial $x_0 = 3$ na seguinte série:

$x_0 = 3$

$x_1 = 3 - \tan(3) = 3{,}14254654$

$x_2 = x_1 - \tan(x_1) = 3 - \tan(3) + \tan(3 - \tan(3)) = 3{,}14159265$

Podemos também utilizar o método para o calculo de π (PI) pela simplificação: $x_{i+1} = x_i + \sin(x_i)$, pois comparando com a fórmula na proximidade de π **(1)**, $\cos(x_i) \approx -1$ [3]. Neste caso a função $f(x) = \sin(x)$ pode ser obtida através da expansão da série de Taylor 8.

Método empírico

Os métodos empíricos consistem em calcular o valor de π(Pi), com base em experimentos aleatórios(testes), que podem ser estatísticos ou não. Utilizaremos dois métodos para fazer esses cálculos: Usando a circunferência e a área do círculo. Que segue:

- Método I - Usando a circunferência.

Neste método utilizaremos alguns objetos circulares de dimensões diferentes (latas, pratos ou cestos), com ajuda de uma tira de papel rodearemos o objeto para saber o perímetro do mesmo. Depois com uma régua mediremos o diâmetro da circunferência do objeto e registraremos todos os valores.

Dividindo o perímetro pelo diâmetro, apuraremos o número π(Pi) ou pelo menos o valor aproximado. Podemos fazer o mesmo processo com outros objetos circulares e concluiremos que todas as medidas serão também o valor de π(Pi).

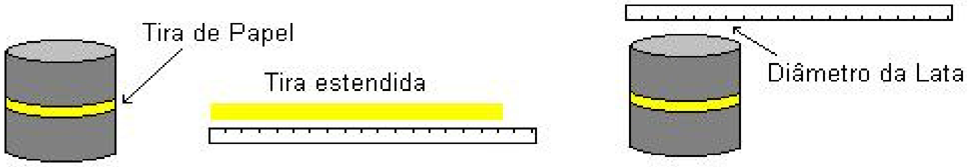


Figura 3.4.6 - Mostrando de forma mais clara como fazer as medidas

8 - Outro método baseado em cálculo para gerar representações de funções em séries. Publicado pelo matemático Taylor no seu livro *Methodus incrementorum directa et inversa*.

- Método II - Usando a área do círculo:

Observando a figura 3.4.7, notamos que o círculo está inscrito em um quadrado. Podemos calcular o π (Pi) utilizando a figura como um alvo, lançando dardos aleatoriamente neste alvo, concluímos que a probabilidade de que os dardos atinjam o circulo é de exatamente $\pi/4$, exemplo:

Se lançarmos 400 dardos, aproximadamente 314 atingiram o circulo (a área em azul) e 86 atingirão a área em vermelho. Tendo o diâmetro da circunferência "N" e lado do quadrado "N", teremos $\pi = 4$(área do circulo / área do quadrado).

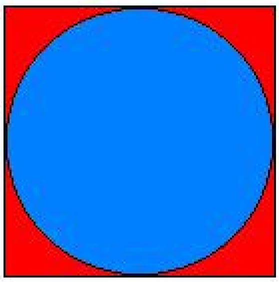


Figura 3.4.7 - Círculo inscrito no quadrado.

4. O método da Agulha de Buffon.

Diante de todos os métodos científicos já vistos para estimar o valor de π, falaremos agora sobre o Método da Agulha de Buffon, que utiliza a estatística de Monte Carlo[9], o mesmo é realizado através da obtenção de aproximações numéricas de funções complexas, envolvendo tipicamente a geração de observações de alguma distribuição de probabilidades e o uso da amostra obtida para aproximar a função de interesse.

Com base nisso, o Conde de Buffon, como assim era conhecido, fez uso de procedimentos empíricos, ou seja, o procedimento foi realizado sem caráter cientifico apenas com base em tentativas. Por esse motivo decidimos dar ênfase maior a este experimento constatando-o estatisticamente através de distribuição de probabilidade.

Figura 4.1 – Fotografia do criador do método o conde Georges-Louis.

Proposto por Georges-Louis, conhecido na época como conde de Buffon[10],

9- Método estatístico com aplicações nas áreas como a física, matemática e biologia.
10- Nome dado a Georges-Louis por residir na localidade de Buffon, na Conte-d'Or onde foi senhorio da família Laclere, naquela época usava-se a localidade para identificar donde vinha os pensadores

nascido em Montbard, em 7 de Setembro de 1707 e falecido em Paris em 16 de Abril de 1788, naturalista, matemático e escritor francês.

O famoso conde divulgou no século XVII um método, que consistia em calcular a probabilidade de uma agulha com comprimento igual a $\boldsymbol{b}$ jogada a um plano composto por retas paralelas de largura $\boldsymbol{t}$ valendo uma condição onde $\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{t}$, toque uma das linhas que divide as paralelas, sabendo-se que se ocorrer o contato da agulha com uma das linhas o lançamento é considerada favorável e se não ocorrer contato consideramos o lançamento não favorável, ou seja, neste caso basicamente o método trabalhará com duas possibilidades a de a agulha cruzar ou não a linha que divide as paralelas do plano.

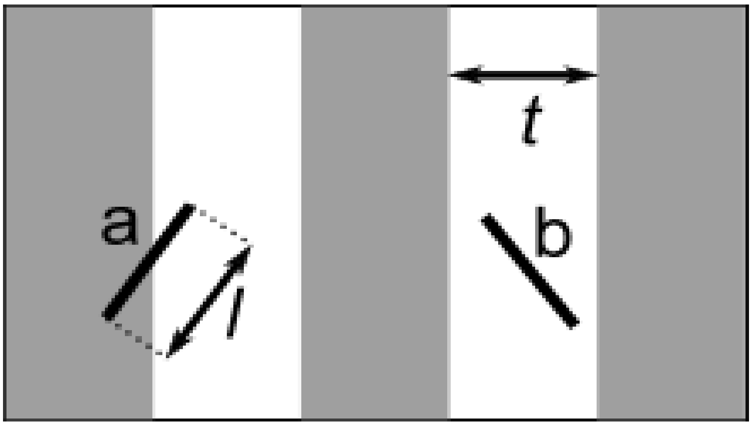


Figura 4.2 – Agulha de Buffon: nesta figura estamos mostrando a localidade de cada agulha satisfazer o método.

A descoberta de Buffon solidifica-se pelo fato de ter comprovado após **N** sucessivas tentativas, que a razão entre o número de lançamentos favoráveis e os não favoráveis, era dada por uma expressão que envolvia o número π **(PI).**

Primeiramente para que as tentativas se confirmem é preciso satisfazer algumas condições importantes, que as variáveis do eventual sejam independentes e que seus eventos de risco "testados" também sejam independentes, portanto um não deve se influenciar no resultado do outro ou que a influência seja a menor possível.

4.1. Experimento:

Dado uma agulha de comprimento igual a ***l,*** lançada casualmente num plano composto por retas paralelas de largura ***a,*** obtendo os valores de ***l*** e ***a***, basta fazer a seguinte observação em duas variáveis triviais basta para percebermos se houve contato da agulha com uma das linhas que dividem as paralelas do plano: ***d,*** a distância do centro da agulha após lançada, não importando sua localidade no plano com a linha paralela mais próxima a este centro e ***θ,*** o ângulo que a agulha faz com uma reta imaginária passando pelo seu centro, paralela as retas do plano.

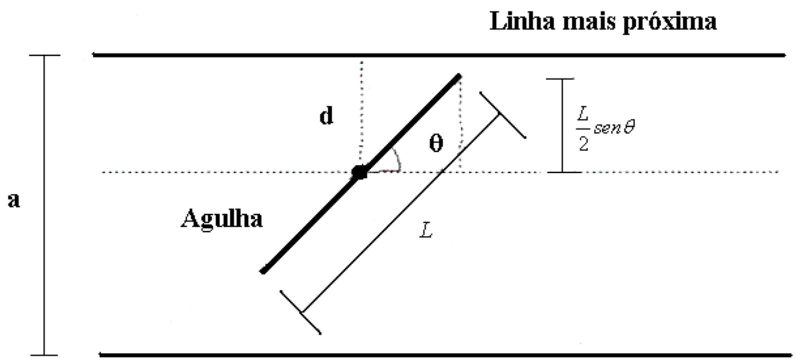


Figura 4.3 – Agulha de Buffon: nesta figura estamos mostrando a agulha no plano e as medidas de d e θ.

Observando a figura acima, percebe-se que a medida da distância ***d,*** está compreendido entre 0 e $\frac{a}{2}$, ou seja $d \in \left[0,\frac{a}{2}\right]$, pois qualquer ponto do centro da agulha onde quer que ela caia está numa distância máxima de $\frac{a}{2}$ em relação a reta paralela mais próxima, percebemos como por exemplo na (figura 2) que a reta mais próxima esta acima da agulha, note que a escolha da reta não influenciará no calculo pois, se girarmos a mesma figura em 180° optaremos desta vez pela reta abaixo como referencia, portanto toda configuração da agulha no plano terá um $\boldsymbol{\theta} \in [0,\pi]$. Conhecendo o valor de $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{\theta}$, torna fácil identificar se a agulha irá ou não tocar alguma linha das paralelas no plano, que equivale se resolução da inequação descrita abaixo é válida.

$$\boldsymbol{d} \leq \frac{l}{2}\sin(\theta)$$

Apesar de tudo, Buffon mesmo sabendo que a inequação só mostraria a posição que a agulha iria cair, ela seria muito útil na para resolver seu questionamento em saber, qual a probabilidade da agulha cair num plano de modo a cruzar uma linha entre duas retas paralelas vizinhas?

Sabemos que o problema não exige preferência nenhuma sobre a configuração da agulha no plano e que $\boldsymbol{\theta}$ não interfere em $\boldsymbol{d}$ e vice versa, portanto ambos são independentes, tomando estas situações como hipótese, podemos afirmar que, estatisticamente as seguintes suposições:

a) $\boldsymbol{d} \rightarrow$ A menor distância entre o centro da agulha à sua paralela mais próxima.

b) $\boldsymbol{\theta} \rightarrow$O ângulo que a agulha faz com uma reta imaginária que passa pelo seu centro, paralela as retas do plano.

Ambos são variáveis aleatórias e independentes como já vimos anteriormente. No entanto para definirmos as suposições, satisfazendo as normas estatísticas devemos representá-las como sendo distribuição uniforme de suas posições:

$$\boldsymbol{d} \rightarrow \mathrm{D} \sim \mathrm{U}_{\left(0,\frac{a}{2}\right)}$$

$$\boldsymbol{\theta} \rightarrow \Theta \sim \mathrm{U}_{(0,\pi)}$$

Definidas as suposições, devemos caracterizar um vetor aleatório (D, Θ), para com isso determinarmos à probabilidade do evento $\Omega \subseteq \left[0,\frac{a}{2}\right] X \left[0,\pi\right]$ que é dado por:

$P\left[w \in \Omega\right] = \int_{\substack{w\in\Omega \\ w=(x,y)}} f_D(x) f_\Theta(y) dxdy = \int_{w\in\Omega} \frac{2}{a}\frac{1}{\pi} dxdy = \frac{2}{a\pi}\int_{w\in\Omega} dxdy$ onde f_D é a densidade de D e f_Θ é a densidade de Θ[5].

Próximo passo será definir a variável ***J*** representada através do vetor aleatório (D,Ω):

$$J = \begin{cases} 1, D \leq \dfrac{L}{2} sen\theta \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

Percebemos então que quando ***J***=1, precisamente é quando a agulha toca com uma das paralelas, afirmando a recíproca quando ***J***= 0, quando a agulha não toca nenhuma das paralelas.

De acordo com a (figura 3) abaixo, verifique que a região cinza em destaque, essa região compreende a distribuição (D, Θ), onde ***J***=1 e neste caso é exatamente a região onde provavelmente a agulha tocará dado por:

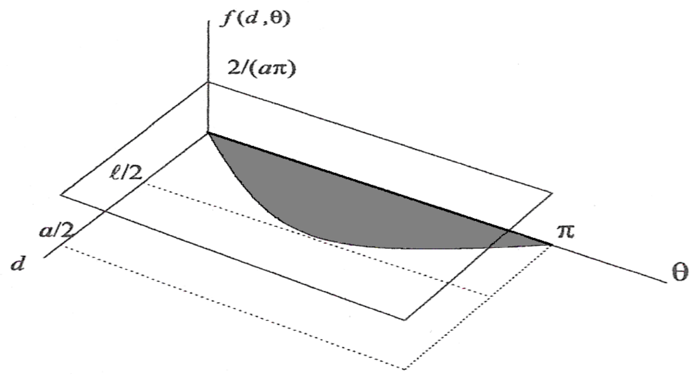


Figura 4.4 – O espaço em cinza será a região onde há probabilidade da agulha cair.

11- Letra grega que representa teta na sua forma maiúscula.

P[***J*=1**]: $P\left[D \leq \frac{l}{2}\sin(\Theta)\right] = \frac{2}{a\pi}\int_{y=o}^{\pi}\int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin(y)} dx\, dy = \frac{2}{a\pi}\int_{y=0}^{\pi}\frac{l}{2}\sin(y)dy =$

$$= \frac{2}{a\pi}\frac{l}{2}\left(\cos(0) - \cos(\pi)\right) = \frac{2l}{a\pi}.$$

E (***J*=0**): $1P\left[J = 1\right] + 0P\left[J = 0\right] = P\left[J = 1\right] = \frac{2l}{a\pi}$

"Se um evento de probabilidade **p** é observado repetidamente durante independentes repetições, a razão da freqüência observada deste evento para o total número de repetições converge em direção a **p** conforme o número de repetições se torna arbitrariamente grande."

Origem do termo Jackob Benoulli

Segundo a lei dos grandes números citada acima se J_1, J_2, J_3... J_n é uma independente e identicamente distribuída à J, então temos:

$\frac{J_1, J_2, J_3, ..., J_n}{n} \xrightarrow{P} \frac{2L}{a\pi} = E(J)$, que é equivalente a $\frac{n}{J_1, J_2, J_3, ..., J_n}\frac{2L}{a} \xrightarrow{P} \pi$.

Calculando esta fórmula por meio de convergência em probabilidade, obtemos a seguinte fórmula:

$$\frac{n\ 2\ l}{h\ a} \approx \pi$$

Assim poderíamos verificar, se repetíssemos n vezes as tentativas de lançamento e anotássemos todas as vezes que a agulha toca uma das paralelas do plano, substituindo a formula obteríamos um valor cada vez mais próximo ao do π(Pi).

Como naquela época não havia inteligência computacional nem cientifica que explicasse como encontrar o valor π (Pi), descobrir um experimento de certa forma bastante simples do qual a partir do lançamento de agulhas fosse viável para sua aproximação, tornou Buffon conhecido ate os dias de hoje pela sua façanha.

4.2 Simulação

Verificaremos o experimento da Agulha de Buffon, realizando uma simulação, através de um crescente e aleatória a quantidade de lançamento de agulhas.

Contudo iremos avaliar se ocorrerá a aproximação ao valor real de π, por meio do preenchimento de uma tabela e calculando o erro, perceberemos a validade do método.

Dada uma agulha de 1 cm de comprimento, lançada num assoalho composto por retas paralelas de largura igual a 1cm, qual sua proximidade para π após as seguintes tentativas: 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8, 10^9 de lançamentos.

Sendo $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{l} = \mathbf{1}$ teremos após a substituição das variáveis, usando a seguinte fórmula para estimar o valor de π, segundo Buffon, obteremos os seguintes dados expostos na tabela a seguir.

$$\frac{n\ 2\ l}{h\ a} \approx \pi$$

Tabela 4.1:

N	***h***	***Π'***	**| *π* - *π'* |**
10	7	2,857142857	0,284449796
100	69	2,898550725	0,243041929
1000	646	3,095975232	0,045617421
10000	6415	3,117692907	0,023899746
100000	63941	3,127883518	0,013709136
1000000	637973	3,134928908	0,006663746
10000000	6365078	3,142145312	0,000552659
100000000	63655960	3,14188962	0,000296967
1000000000	636564090	3,141867459	0,000274806

Dados:

n: número de lançamentos.

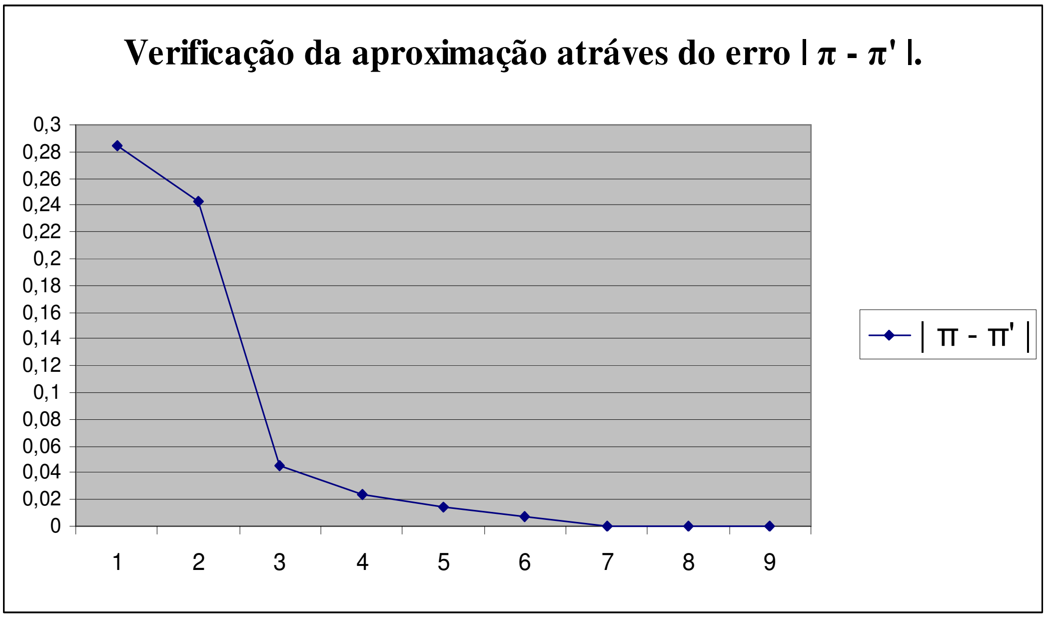
a: comprimento da largura das linhas do plano.

h: número de lançamentos onde à agulha tocou numa das paralelas.

π': estimativa para o valor de π.

π: valor real de pi.

Através do gráfico abaixo visualizaremos a retrocesso do erro.



Observando o cálculo do erro adquirido pela diminuição no módulo do valor aproximado do π com seu real valor, notamos que quanto maior o número de lançamentos de agulhas maior é a estimativa da aproximação tornando o erro menor.

5. CONCLUSÃO

O “Pi” é um número irracional que representa na matemática a relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, o mesmo possui uma representação infinitesimal, sendo muito cobiçado por estudiosos desde a antiguidade até os dias atuais.

Por meio dessa pesquisa bibliográfica, procuramos abordar um estudo detalhado sobre este numero irracional que apesar de pouco conhecido é muito importante não só na matemática como em todas as outras ciências. Assim mostramos diversos tipos de calculo do pi científicos e empíricos, sua cronologia, utilidades e importâncias ligados a vários períodos históricos. No entanto faz-se interessante uma abordagem do “Pi” na contemporaneidade. Conhecer questões como: Qual utilidade do “Pi” atualmente? Porque muitos estudiosos calculam altos valores de casas decimais relacionadas ao “Pi”?

De modo que a matemática é vista como uma ciência incógnita e complicada, vimos na elaboração deste trabalho um meio de fragilizar tal concepção, a partir da exposição de um período histórico da matemática tão fascinante que é o descobrimento de “Pi” e demais questões ligadas a esse numero. Por fim procuramos dessa forma, tornar acessível uma linha de conhecimento significante que por muitos é despercebida.

REFERÊNCIAS

EVES, Haward. Introdução à História da Matemática. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004. cap. 4-8, p. 141-148.

BOYER, Carl B. História da Matemática. 2ª edição. São Paulo, SP: Editora Edgard Blügher Ltda., 1996. cap. 12 p. 138.

OLIVEIRA, Antônio Marmo de; **SILVA**, Agostinho. Biblioteca da Matemática Moderna São Paulo, SP: Editora Lisa, 1980. cap. 11, p. 134-149.

RODRIGUES, Auro de Jesus. Metodologia da Ciência. Aracaju, SE: Unit, 2004.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. Manual de Monografia da Universidade Tiradentes. Aracaju, SE: UNIT, 2003.

BIEMBENGUT, Maria Salett. Número de Ouro e Secção Áurea. Blumenau, SC: Editora da FURB, 1996.

VÁRIOS, tradução: Padre Antonio P. de Figueiredo. Bíblia Sagrada. Editora EP – Editora Maltese, 1962.

FRID, Hermano. Os Números Irracionais. Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.

LINS, Lauro Didier. Agulha de Buffon. Artigo Científico publicado em 19 de Maio de 2004.

VICENZI, Scheila; **PEZZINI,** Simone. Número Pi. Artigo de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Caxias do Sul.

MARTINS, Jorge Santos. Projetos de Pesquisa. Campinas, SP: Editora Autores Associados Ltda., 2005.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.eb23-uifoes.rcts.pt/Netmate/site/pi.htm, no dia 21 de Janeiro de 2006 às 18:32.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.Matemática.nosapo.pt/nreais.htm, no dia 21 de Janeiro de 2006 às 18:45.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.expoente.com.br/professores.htm, no dia 15 de Abril de 2006 às 15:20.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.interaula.com/matweb/gplana/209/mod209b, no dia 15 de Abril de 2006 às 16:30.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.alunos.cc.fc.ul.pt/~l19660/historiadopi.htm, no dia 15 de Abril de 2006 às 16:25.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.meusestudos.com/biografias/arquimedes.html, no dia 20 de Agosto de 2007 às 10:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/pi.html, no dia 17 de Novembro às 15:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.html, no dia 20 de Agosto de 2007 às 10:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/Raiz_quadrada_de_2.html, no dia 06 de Novembro às 14:31.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/pi.html, no dia 17 de Novembro às 15:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.educ.fc.ul.pt/~icm18.html, no dia 17 de Novembro de 2007 às 09:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.html, no dia 20 de Agosto de 2007 às 10:34.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.bekman.com/pi.pdf, no dia 23 de Novembro de 2007 às 20:25.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.apm.pt/apm/curiosidades/curio3.html, no dia 23 de Novembro de 2007 às 21:13.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/John_Wallis.html, no dia 23 de Novembro às 21:42.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/Raiz_quadrada_de_2.html, no dia 06 de Novembro às 14:31.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/Georges-Louis_Leclerc.html, no dia 26 de Outubro às 14:28.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.educ.fc.ul.pt/fcm/icm99/icm17/curiosidpi.htm, no dia 26 de Outubro às 15:33.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.paginas.terra.com.br/educacao/Astronomia/pi.htm, no dia 26 de Outubro às 16:57.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.wikipedia.org/wiki/Método_de_Monte Carlo.html, no dia 26 de Outubro às 18:03.

Fonte de pesquisa coletados no site: www.malhatlantica.pt/mathis/Babilonia/Babilonia.htm, no dia 05 de Dezembro de 2007.