UNIVERSIDADE TIRADENTES

AMANDA CRISTINA SANTOS DE AQUINO
LETÍCIA MELO SILVA

DESCOBRINDO A GEOMETIA FRACTAL

Propriá
2008

AMANDA CRISTINA SANTOS DE AQUINO
LETÍCIA MELO SILVA

DESCOBRINDO A GEOMETRIA FRACTAL

Monografia apresentada ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para obtenção da graduação em Matemática.

Prof. Antônio José

Propriá
2008

AGRADECIMENTOS

A Deus: por ter permitido nosso ingresso a este curso, dando-nos coragem e perseverança, iluminando nossos caminhos para que chegássemos com sucesso à conclusão da nossa graduação.

Aos nossos familiares: pais e irmãos: Que nos incentivaram no percurso dos nossos estudos, dando-nos força e apoio, empreendendo nossos esforços materiais e intelectuais, através dos seus sorrisos e abraços.

Ao Professor Antônio José, que nos iluminou e nos orientou nos momentos de escuridão, clareando nossos pensamentos e norteando o caminho a ser seguido.

E aos demais professores que nos ajudou e nos incentivou para que pudéssemos concluir essa trajetória com sucesso.

MENSAGEM

A Matemática, quando bem vista, possui não apenas verdade mas uma beleza suprema uma beleza fria e austera como a de uma escultura.

Bertrand Russel

RESUMO

Esta monografia tem como finalidade apresentar um cenário sobre as potencialidades da geometria fractal na descrição de vários sistemas encontrados na Natureza e na compreensão de fenômenos que neles acontecem. Para entendermos melhor os fractais analisamos um pouco da Geometria Euclidiana, pois a mesma dará alicerce para que possamos observar criteriosamente esse novo ramo da matemática. Podemos salientar que essa nova Geometria está intimamente ligada à Teoria do Caos que é um campo da matemática que estuda sistemas dinâmicos com movimentos aleatórios que produzem um fim, ou seja, sistemas em movimento que podem ser gerados por leis de evolução simples, o que também encontramos na Geometria dos Fractais. É importante ressaltar que é notória a presença marcante e determinística dos Fractais em diversos ramos das ciências: a Geografia, a Economia, a Medicina, as Artes, entre outras, transformando e dando suporte para modernização, estruturação e aperfeiçoamento das mesmas. Desta forma procurar-se-á mostrar a definição de fractais, o que eles representam na natureza, seus principais autores, pesquisas desenvolvidas, descobertas importantes e possíveis aplicações, de modo coerente e simplificado para o melhor entendimento sobre a Teoria dos Fractais.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 7

2. GEOMETRIA EUCLIDIANA 10

3. TEORIA DO CAOS 14

4. ANALISANDO A GEOMETRIA DOS FRACTAIS 19

4.1 O fractal 19

4.2 Geometria dos Fractais 25

4.3 Os Fractais e suas aplicações nas ciências 30

5. RELAÇÃO ENTRE GEOMETRIA EUCLIDIANA E A GEOMETRIA DOS FRACTAIS 33

6. CONCLUSÃO 37

REFERÊNCIAS 39

ANEXOS 40

1. INTRODUÇÃO

Nas ultimas décadas aconteceram investigações, cujo tema central foi à construção e o estudo de entidades geométricas, que foram chamadas de Fractais pelo seu iniciador, Benoit Mandelbrot. Essas formas geométricas possuem, entre outras, uma propriedade especial, que pode ser considerada característica. Esses entes constituem uma imagem de si, própria em cada uma de suas partes. Segue que suas partes lhe são semelhantes; propriedade conhecida como *auto-similaridade*, ou seja, é a simetria através das escalas, em que o objeto possui auto-semelhança se apresenta sempre o mesmo aspecto a qualquer escala em que seja observado. Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas, perdem a sua estrutura quando são ampliadas ou diminuídas.

A palavra "Fractal" criada em 1975 por Mandelbrot, baseando-se no latim, do adjetivo *fractus* cujo verbo *frangere* correspondente significa *quebrar:* criar fragmentos irregulares, fragmentar. Decorre que quando se diz Geometria Fractal refere-se ao estudo dos fractais que são formas geométricas irregulares e fragmentadas que podem ser subdivididas e cada parte da origem a um todo.

Essa geometria é o ramo da matemática que estuda as propriedades e comportamentos dos fractais. Descreve muitas situações que não podem ser explicadas em ciência, tecnologia e arte gerada por computador. As raízes conceituais dos fractais remontam à tentativa de medir o tamanho de objetivos para os quais as definições tradicionais baseadas na geometria euclidiana falham.

Contudo, a Geometria dos Fractais está intimamente ligada a uma ciência chamada CAOS. As estruturas fragmentadas, extremamente belas e complexas dessa geometria, fornecem uma certa ordem ao Caos, razão de ser, às vezes, considerada como a sua linguagem, que busca padrões dentro de um sistema por vez aparentemente aleatório. Ambas, Geometria Fractal e Caos se desenvolvem principalmente pelo rápido aprimoramento das técnicas computacionais; a primeira teve e tem como poderoso propulsor seu inegável apelo estético, daí sua entrada no domínio das artes. Essa ciência trouxe consigo o "ver ordem e padrões", onde anteriormente só se observava o irregular, o aleatório, o imprevisível, digamos mesmo o "caótico". Entretanto, nota-se que o Caos colocou elos entre temas não relacionados, justamente pelas suas irregularidades. Cientistas, de áreas diversas, tiveram dificuldade e desânimo até mesmo para publicar, para colocar suas idéias e resultados de forma publicável. Temas como desordem na atmosfera, turbulência nos fluidos, variação populacional de espécie, oscilações do coração e cérebro, interligações microscópicas de vasos sanguíneos, ramificações alveolares, cotações da bolsa, formas das nuvens, relâmpagos, ligações entre diferentes tipos de irregularidades; e surpreendentes ordens no caos foram descobertas através dos fractais.

Este trabalho esta dividido em quatro capítulos:

No primeiro capítulo será feita uma abordagem sobre a Geometria Euclidiana mostrando seus principais elementos, aspectos e conceitos que dão origem aos seus postulados e axiomas, explicando assuntos pertinentes à Geometria de Euclides.

No segundo capítulo, descrevemos uma Teoria denominada Caos, fenômenos que tem sido estudados por suas irregularidades e conseqüências imprevisíveis originadas de uma determinada ação, que ajudou na compreensão do surgimento da Geometria dos Fractais.

No terceiro capitulo faremos um estudo das formas geométricas da natureza enfocando novos conceitos matemáticos decorrentes da necessidade de uma nova geometria capaz de explicar o surgimento dos Fractais que são figuras irregulares não-euclidiana subdivididas em fragmentos que dão origem ao todo.

Quando nos referimos ao quarto capítulo estudaremos um conteúdo matemático que explicitará a relação entre a Geometria Euclidiana e a Geometria dos Fractais, enfocando suas diferenças e afinidades.

Percebendo que a geometria dos fractais nos auxilia a entender melhor o mundo, faz-se necessário analisarmos alguns pontos na matemática de essencial importância:

Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação e está implícita em vários ramos das ciências; Podemos entender melhor os fenômenos da natureza através dos Fractais e a Teoria do Caos; Através da Geometria Euclidiana surge a Geometria dos Fractais.

Partindo das hipóteses formuladas com o intuito de traçar um estudo sistematizado, tomamos como referência a análise bibliográfica de vários autores, entre eles; Elon Lages, Michael Fielding, Rodrigo Siqueira, Benoit Mandelbrot, Gauss, Laplace, Leonard Mlodimow, Eliane Quelho Frota Rezende, Eduard Lorenz, como também obtivemos subsídios em revista; Superinteressante, e em sites: tttp://www.fractarte.com.br/artigos/superinteressante.php.

2. GEOMETRIA EUCLIDIANA

Neste capítulo será feita uma abordagem a geometria Euclidiana mostrando seus principais elementos, aspectos e conceitos.

Euclides foi um dos maiores matemáticos gregos da antiguidade. Não se sabe com certeza a data do seu nascimento, talvez tenha sido por volta do ano 325 antes de Cristo. Sabe-se que ele viveu na cidade de Alexandria, no atual Egito, quase certamente durante o reinado de Ptolomeu I (323 BC–283 BC) e morreu de causas desconhecidas, no ano 265 antes de Cristo. Por essa razão ele é citado como Euclides de Alexandria. Euclides nos deixou um conjunto de livros de matemática, os **Elementos**, que pode ser considerado um dos mais importantes textos na história da matemática. Nesse monumental conjunto de 13 volumes Euclides reuniu toda a geometria conhecida em sua época, ou seja, os vários resultados originalmente obtidos por outros matemáticos anteriores a ele e seus trabalhos originais.

No clímax desta luta para inventar a matemática destaca-se Euclides, com sua história de revolução, axiomas, teoremas, demonstrações e o nascimento da própria razão. Em seguida ele deduz proposições ou teoremas (proposição que, para ser admitida ou se tornar evidente, necessita de demonstração), os quais constituem o saber geométrico, como por exemplo. “Se em um triângulo dois ângulos são iguais entre si, os lados opostos a esses ângulos também são iguais entre si”.

O fato importante é que Euclides apresentou esses resultados dentro de uma estrutura logicamente coerente e simples. Ele até mesmo apresentava provas de teoremas matemáticos que haviam sido perdidos. Euclides deduzia, entre vários outros resultados, as propriedades dos objetos geométricos a partir de um pequeno conjunto de axiomas (são afirmações que não possuem prova, mas são aceitas como auto-evidentes). Por esses motivos Euclides é considerado o "pai da geometria" e o fundador do chamado "método axiomático da matemática".

Os axiomas de Euclides são os seguintes:

1. dados dois pontos há um intervalo que os une.
2. um intervalo pode ser prolongado indefinidamente.
3. um círculo pode ser construído quando seu centro e um ponto sobre ele são dados.
4. todos os ângulos retos são iguais.
5. se uma linha reta inclinada sobre duas linhas retas faz os ângulos interiores do mesmo lado menores do que dois ângulos retos, as duas linhas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado no qual os ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Esse modo como Euclides ordena o conhecimento geométrico é chamado de sistema euclidiano. Durante séculos esse sistema valeu como modelo insuperável do saber dedutivo: os termos da teoria são introduzidos depois de terem sido definidos e as proposições não são aceitas se não foram demonstradas. As proposições primitivas (postulados), base da cadeia sobre a qual se desenvolvem as deduções sucessivas, Euclides as escolhia de tal modo que ninguém pudesse levantar dúvidas sobre a sua veracidade: eram auto-evidentes, portanto isentas de demonstração.

Euclides, como já fizera Aristóteles, buscou o ideal de uma organização axiomática, que em última instância se reduz à escolha de um pequeno número de preposições notoriamente verdadeiras daquele domínio do conhecimento, e a posterior dedução de todas as outras preposições verdadeiras desse domínio, a partir delas. Surge com Euclides e Aristóteles (estará plenamente desenvolvida no inicio de século XX com a escola formalista de Hilbert) a busca de uma economia do pensamento. A História da computação que tem um marco significativo nesse ponto da história: o começo da busca da automatização do raciocínio e do cálculo.

O sistema geométrico apresentado por Euclides nos livros que formam os Elementos durante muito tempo foi considerado "a" geometria. Era a única disponível e podia ser usada na vida diária sem contradições aparentes. Os "Elementos" de Euclides foram os fundamentos do ensino de geometria praticamente até o início do século XX. Hoje a geometria apresentada por Euclides é chamada de "geometria Euclidiana" para distingui-la das outras formas de geometria chamadas "geometrias não-Euclidianas" que foram descobertas no século XIX. As geometrias não-Euclidianas cresceram a partir de mais de 2000 anos de investigação sobre o quinto postulado de Euclides, um dos axiomas mais estudados em toda a história da matemática. A maior parte dessas investigações envolveu tentativas de provar o quinto postulado, relativamente complexo e presumivelmente não intuitivo, usando os outros quatro postulados. Se eles tivessem sido bem sucedidos teriam mostrado que esse postulado seria na verdade um teorema. Na verdade os "Elementos" consistem de duas partes: a primeira é formada por teoremas que são provados sem o auxílio do quinto postulado e formam o que chamamos de "geometria absoluta" e a parte formada por teoremas que estão baseados no quinto postulado e que formam a "geometria Euclidiana" propriamente dita.

Assim, Euclides definiu os seus cinco postulados, concretizando suas idéias.

(a) Pode-se traçar uma (única) reta ligando quaisquer dois pontos;

(b) Pode-se continuar (de uma única maneira) qualquer reta finita continuamente em uma reta;

(c) Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio;

(d) Todos os ângulos retos são iguais;

(e) É verdade que, se uma reta ao cortar duas outras, forma ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Mas havia um problema no sistema de Euclides: suas “evidências” não eram assim tão evidentes. O seu quinto postulado (“Se uma reta cortar duas outras retas de modo que a soma dos dois ângulos interiores, de um mesmo lado, seja menor que dois ângulos retos, então duas outras retas cruzam, quando suficientemente prolongados, do lado da primeira reta em que se acham os dois ângulos.”) não convenceu de modo algum, e despertou perplexidade na história do próprio pensamento grego, árabe e renascentista.

A Geometria teve em seu inicio o caráter puramente utilitário. Seu nome de origem Grega mostra isso, pois “geo-metria” significa medição da terra. E com certeza esta atividade era realizada por vários povos e não somente pelos gregos. Por exemplo, o triangulo retângulo que, segundo alguns historiadores, parece ter surgido com Pitágoras, já era utilizado anteriormente no Egito, na África e na Babilônia.

Os gregos foram os primeiros a perceber que a natureza poderia ser entendida usando-se a matemática que a geometria poderia ser aplicada para revelar, não apenas para descrever. Desenvolvendo a geometria a partir de descrições simples de pedra e areia, os gregos extraíram as idéias de ponto, linha e plano. Retirando a cortina que encobria a matéria, eles revelaram uma estrutura possuidora de uma beleza que a civilização nunca tinha visto antes e foram necessários para criar uma ligação entre as geometrias aplicadas à construção de fractais.

3. TEORIA DO CAOS

Figura 1: Símbolo da Teoria do Caos

Os Fenômenos Caóticos, bem como a Geometria Fractal, têm sido nos últimos anos, alvo das investigações de muitos cientistas em todo o mundo. As técnicas fractais em particular, mais do que um ramo da matemática, tem-se revelado uma ferramenta extremamente útil a muitas Ciências, mesmo as sociais, permitindo uma linguagem comum entre especialistas de diferentes áreas.

A teoria estabelece que uma pequena mudança ocorrida no início de um evento qualquer que pode ter conseqüências desconhecidas no futuro. Isto é, se você realizar uma ação nesse exato momento, essa terá um resultado amanhã, embora desconhecido. O meteorologista norte-americano Edward Lorenz descobriu, no início da década de 1960, que acontecimentos simples tinham um comportamento tão desordenado quanto à vida. Ele chegou a essa conclusão após testar um programa de computador que simulava o movimento de massas de ar. Em busca de uma resposta Lorenz teclou um dos números que alimentavam os cálculos da máquina com algumas casas decimais a menos, na expectativa de que o resultado tivesse poucas mudanças, no entanto, a pequena alteração transformou completamente o padrão das massas de ar. Segundo ele seria como se o bater das asas de uma borboleta no Brasil causasse, tempos depois, um tornado no Texas. Fundamentado em seus estudos, ele formulou equações que demonstravam o “efeito borboleta”, nos mostra que uma simples alteração nestas condições pode levar o experimento a ter um resultado completamente diferente do esperado. Essas pequenas alterações podem ser causadas por ruídos no ambiente ou problemas com o equipamento e não podem ser evitadas. Originando assim a Teoria do Caos.

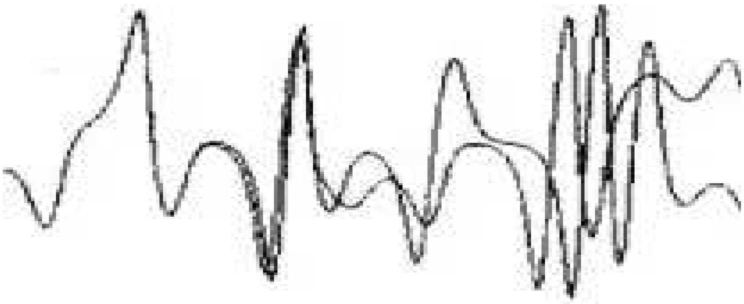


Figura 2: Ao mudar a precisão em 1000 vezes Lorenz defronta-se com instabilidade numérica

Ao descobrir que com pequenas alterações obtem-se grandes mudanças, Lorenz através de um estudo sobre aspiral dupla e repilação concluiu que não havia como afirmar as condições do tempo. Então começou a procurar um sistema simples que possuía sensibilidade as condições iniciais. A principio esse sistema era composto por doze equações e foram simplificadas até terem-se três equações. O resultado dessas equações parece ser completamente aleatório, mas quando plotados criam uma espiral dupla.

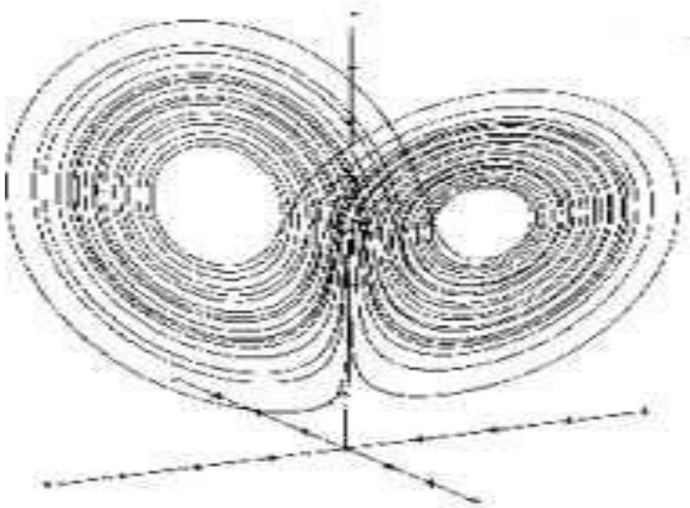


Figura 3: Aspiral dupla encontrada quando coloca-se os pontos em um gráfico.

Para reforçar essa teoria, na década de 1970 o matemático polonês Benoit Mandelbrot notou que as equações de Lorenz coincidiram com as que ele próprio havia feito quando desenvolveu os fractais (figuras geradas a partir de fórmulas que retratam matematicamente a geometria da natureza, como o relevo do colo, etc.). A junção do experimento de Lorenz com a matemática de Mandelbrot indica que a Teoria do Caos está na essência de tudo, dando forma ao universo extremamente sensível às condições iniciais, ou seja, sistemas caóticos que são indeterminísticos e muito difíceis prever seus resultados, o seu comportamento não periódico, portanto não se tem a expressão descrevendo o estado do sistema.

Um conjunto de objetos estudados que se inter-relacionem é chamado de sistemas. Os quais apresentam-se em duas categorias: lineares e não-lineares, que divergem entre si na sua relação de causa e efeito. Na primeira a resposta a um distúrbio é diretamente proporcional à intensidade deste. Já na segunda a resposta não é necessariamente proporcional à intensidade do distúrbio, e é esta a categoria de sistemas que serve de objeto à teoria do caos, mais conhecidos como sistemas dinâmicos não-lineares. O atrito, a turbulência de uma massa de ar, ou o crescimento de uma população, são exemplos de sistemas dinâmicos não-lineares sobre os quais esta 'Ciência do Caos'.

Esta teoria estuda o comportamento aleatório e imprevisível dos sistemas, mostrando uma faceta onde podem ocorrer irregularidades na uniformidade da natureza como um todo. Isto ocorre a partir de pequenas alterações que aparentemente nada têm a ver com o evento futuro, alterando toda uma previsão física.

Uma das idéias centrais, é que os comportamentos casuais (aleatórios) também são governados por leis e que estas podem predizer dois resultados para uma entrada de dados. O primeiro é uma resposta ordenada e lisa e cujo futuro dos eventos ocorre dentro de margens estatísticas de erros previsíveis. O segundo é uma resposta também ordenada, onde porém a resultante futura dos eventos é corrugada, onde a superfície é áspera, caótica, ou seja, ocorre uma contradição neste ponto onde é previsível que os resultados de um determinado sistema será caótico.

Portanto, Caos é um campo da matemática que estuda sistemas dinâmicos, ou seja, sistemas em movimento. A teoria do Caos baseia-se em demonstrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento, ou seja, sistemas matemáticos que se modificam com o tempo, como por exemplo, a distribuição genética de uma população.

Vejamos um exemplo do cotidiano. Certamente todos nós já planejamos algo do tipo: "amanhã à tarde irei à casa do meu colega para irmos à praia". Mas no dia seguinte acordamos com o céu cinzento, mesmo tendo a previsão meteorológica favorável.

Podemos então dizer, corretamente que o que aconteceu de inesperado nesse dia é culpa do caos ou até mesmo dizer que o clima mundial é realmente um caos. Pois bem, vamo-nos deter um pouco nesta palavra: caos. Ela era usada pelos gregos e significava vasto abismo ou fenda. A palavra também alude ao estado de matéria sem forma e espaço infinito, que existia antes do universo ordenado, suposto por visões cosmológico-religiosas. E finalmente, o sentido mais usual de caos: desordem, confusão.

O desenvolvimento do estudo de Caos cresceu explosivamente, nos últimos anos, devido à preciosa ajuda prestada pelos computadores. Não só, pela sua capacidade de cálculo (necessário para estudar os padrões caóticos), mas também porque permitem representar graficamente os padrões (como é o caso dos fractais).

Mas, detenhamos-nos no exemplo anterior. Poderemos então pensar "devido a esta desordem do caos, nunca poderemos saber quando o clima estará propicio a ir à praia. Será que por detrás desta desordem climática há uma ordem escondida?

A teoria do caos não é uma teoria de desordem, mas busca no aparente acaso uma ordem intrínseca determinada por leis precisas. Além do clima, outros processos aparentemente casuais apresentam certa ordem, como por exemplo, crescimento populacional, flutuação do mercado financeiro, os batimentos cardíacos, o quebrar das ondas do mar, o movimento de placas tectônicas, que possuem propriedades fractais.

A geometria fractal constitui, portanto, uma parte da teoria do caos.

> "Os Fractais são representantes matemáticos de padrões aparentemente complicados, mas que podem ser gerados por leis de evolução simples, como previsto pela teoria do caos".
> Benoit Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature,1983, pg 58.

A teoria do Caos propõe então, sistemas para os quais não podemos fazer previsões precisas para o futuro. Ou seja, há uma determinação, até ao ponto em que um "efeito borboleta" incida sobre o sistema.

> Segundo Laplace, " uma inteligência conhecendo todas as variáveis universais em determinado momento, poderia compor numa só fórmula matemática a unificação de todos os movimentos do Universo".
> Transformadas de Laplace, 1965, pág 213.

Contudo, a teoria do Caos tem influenciado os mais diversos campos do conhecimento na área da comunicação, dentre outras, e apresenta uma relação de semelhança que ajuda a entender a geometria dos fractais, buscando métodos na matemática que facilitem o entendimento sobre essa recente geometria, através de definições matemáticas e suas aplicações em diferentes áreas das ciências.

4. ANALISANDO A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

4.1 O FRACTAL.

O estudo das formas geométricas da natureza anteriormente era feito com os métodos da Geometria Euclidiana e com a formulação de conceitos intuitivos e específicos em cada área de conhecimento. Matemáticos, com especial menção ao trabalho de Benoit Mandelbrot em The Fractal Geometry of Nature, desenvolveram e implementaram novos conceitos geométricos que transcendem a Geometria Euclidiana tradicional, logrando alcançar uma geometria, que desse conta das relações entre diferentes escalas e níveis de complexidade, descrevendo a morfologia dos amorfos, das irregularidades, das fragmentações, reentrâncias e depressões encontrados nos objetos e sistemas naturais complexos, dessa forma Mandelbrot, apresentou uma posição concreta sobre o que seriam essas não-formas, refazendo alguns estudos nessa área e conhecendo idéias de outros autores, criando assim a teoria dos fractais.

O termo "fractal" foi criado em 1975 por Benoit Mandelbrot, o "pai dos fractais", matemático francês nascido na Polônia, que descobriu a geometria fractal na década de 70 do século XX, a partir do adjetivo latino fractais, do verbo frangere, que significa quebrar. Portanto, podemos dizer que fractais são figuras irregulares que se apresentam de diversas formas diferentes, muito associadas à arte, a natureza, entre outras pela sua complexidade e diversidade.

> Segundo Mandelbrot, “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Housdorff Besicovith excede estritamente a dimensão topológica”.

Em outras palavras podemos dizer que fractais são objetos gerados pela repetição de um mesmo processo recursivo, apresentando auto-semelhança e complexidade infinita, como podemos evidenciar nas figuras em anexo.

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma aparência consensual. Contudo existem duas características muito freqüentes nesta geometria:

- Complexidade Infinita: É uma propriedade dos fractais que significa que nunca conseguiremos representá-los completamente, pois a quantidade de detalhes é infinita. Sempre existirão reentrâncias e saliências cada vez menores;
- Auto-Similaridade: Um fractal costuma apresentar cópias aproximadas de si mesmo em seu interior. Um pequeno pedaço é similar ao todo. Visto em diferentes escalas a imagem de um fractal parece similar.

Ao analisarmos um fractal da Figura 3.3, ao escolher determinadas partes e ampliando-as como na Figura 3.4, são idênticas ao sistema fractal como um todo, temos assim fragmentos geométricos similares repetindo-se de tal forma, que se mantêm invariantes em qualquer escala, a esta propriedade geométrica de manter seu formato independentemente da ampliação, denominou-se auto-similaridade.

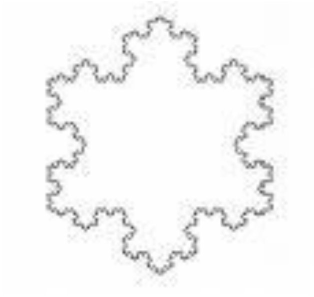


Figura 3.3: Fractal conhecido como floco de neve

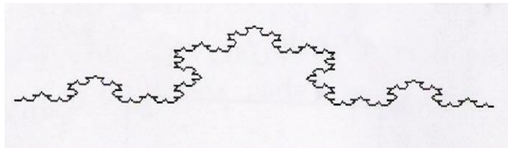


Figura 3.4: Parte do floco de neve ampliado

Para a representação de um fractal, necessitamos criar uma rotina, que utilize uma determinada forma geométrica, fazendo-a repetir-se de forma recursiva em diferentes escalas, para uma melhor compreensão analisemos o princípio de uma máquina com retro alimentação como ilustra a Figura 3.5

19

.

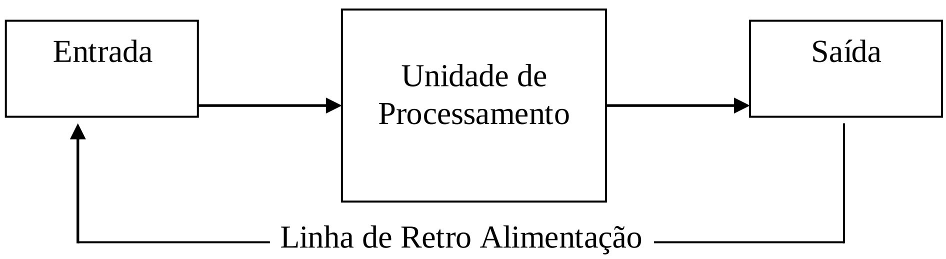


Figura 3.5: Princípio de funcionamento de uma máquina de retro alimentação

Temos uma determinada informação na entrada que após um determinado processo fornece uma nova informação na saída, a qual é reutilizada como nova entrada, e assim sucessivamente até a interrupção do processo. Suponhamos agora um sistema que processe números, caracterizado pela interação de uma fórmula $X_{n+1} = f\,(X_n)$, onde $f\,(X_n)$ pode ser uma função de x, que requer um número como entrada e retome um novo número na saída, que será o resultado da fórmula controlada por um determinado parâmetro, mas em qualquer caso a saída depende somente da entrada, e os índices dos números ajudarão a manter um controle das vezes que o processo se repetirá, essa idéia está descrita na Figura 3.6.

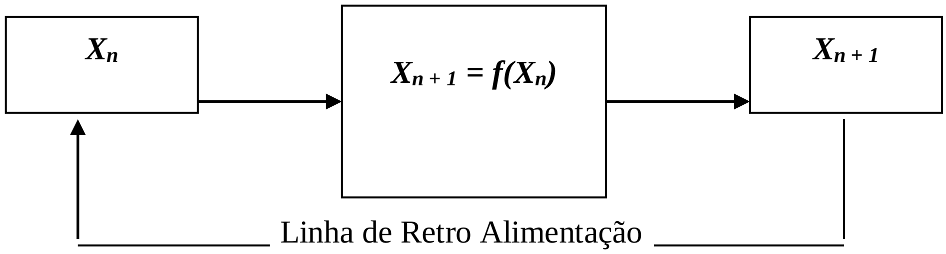


Figura 3.6: Esquema explicando o processo recursivo da rotina

A rotina Figura 3.6 para a criação de um fractal funciona de modo similar ao sistema de retro alimentação, aplicando o princípio da recursividade às formas geométricas, isto é, no final da execução de um algoritmo de criação de uma estrutura o mesmo é executado novamente, criando assim uma estrutura similar.

A crise na matemática caracterizou-se também, com aparecimento de outros trabalhos como os de Koch, Cantor, Peano, Sierpinski, Menger, Lebesgue e Hausdorff. Dentre esses destacaremos os principais matemáticos que contribuíram direta ou indiretamente para a construção do estudo dos fractais. São eles:

Curva de Koch

Helge Von Koch, matemático polonês, que em 1904 e 1906 introduziu um trabalho que hoje recebe o seu nome: “Curva de Koch”, que é um exemplo geométrico da construção de um fractal, onde um mesmo procedimento é aplicado diversas vezes sobre um objeto simples, gerando uma imagem complexa. Cada pedaço da linha foi dividido em 4 pedaços menores idênticos ao pedaço original cada sendo 3 vezes menores que o tamanho original. Observamos a figura a seguir.

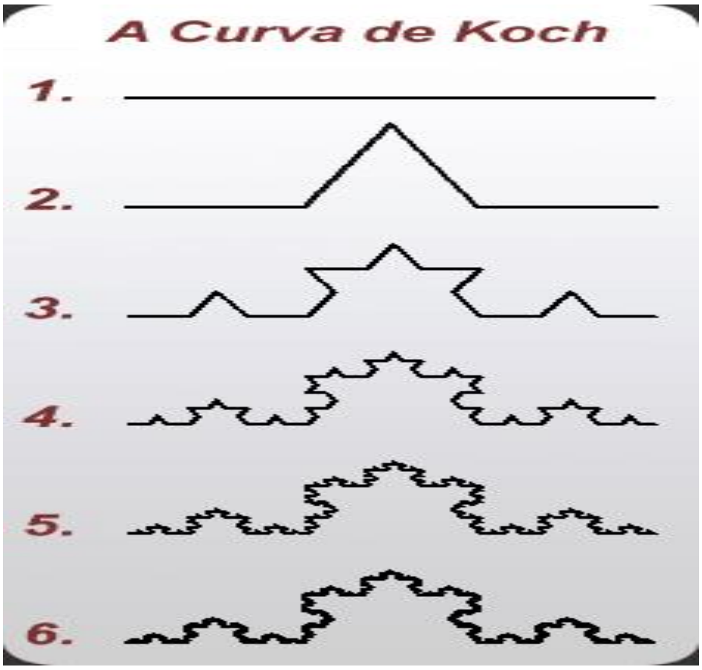


Figura 3.7: Curva de Koch

Assim, usando um novo conceito de dimensão, os matemáticos calcularam a dimensão fractal deste objeto como sendo:

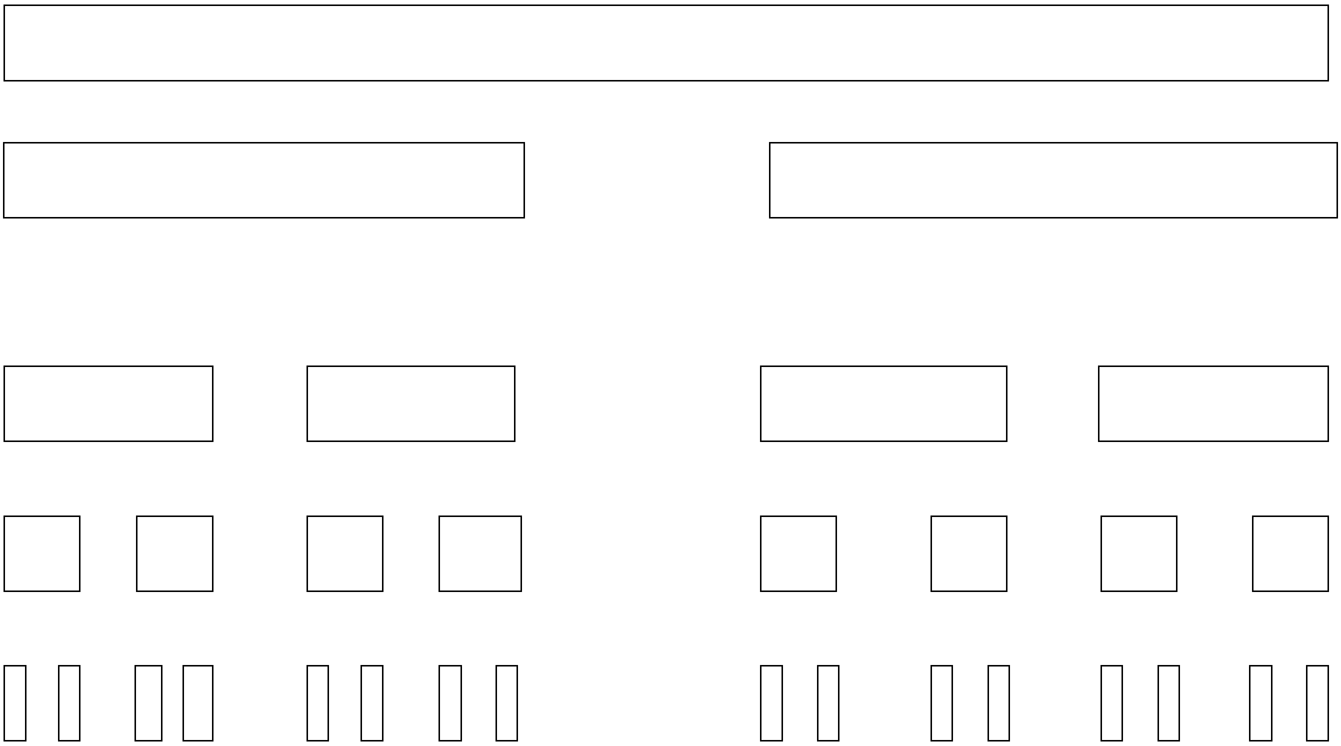
D= log (n . cópias) / log (escala) = log (4) / log (3) = 1,26185.

Onde D é a dimensão de auto-similaridade.

Conjunto de Cantor

George Cantor, matemático nascido na Rússia, foi professor da Universidade de Hale, dedicou muito de seus estudos em pesquisas relativas à fundamentação da matemática, principalmente sobre a Teoria dos Conjuntos. Em 1883, Cantor publicou um trabalho, conhecido por “Conjunto de Cantor”, um conjunto de Fractal auto-similar que apareceu pela primeira vez nas ciências naturais em 1962, num estudo sobre ruídos em linhas de transmissão de dados num laboratório da IBM. Este conjunto é obtido dividindo-as o intervalo

[0,1] em três intervalos iguais e retirando a terça parte central. Veja abaixo exemplo para melhor visualização do excepcional trabalho de Cantor:



Curva de Peano

Giusepe Peano, italiano nasceu em Cueno e faleceu em Turim. Foi professor da Academia Militar de Turim. Dedicou - se a matemática através dos seus importantes trabalhos, dentre eles teve ênfase “a axiomatização para os números inteiros (positivos)”. Utilizando notações e rigor da lógica, surpreenderam os matemáticos contemporâneos, por ser um dos primeiros a dar uma definição formal de espaço vetorial.

Em 1890, tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, pública a sua famosa curva, outro monstro matemático, proposta como cobrindo totalmente uma superfície plana quadrangular.

O “monstro de peano” tem recebido várias citações surpreendentes, por exemplo do russo Vilenkin: “ ele faz aparentar que tudo estaria em ruína, que todo conceito matemático tenha perdido seu significado”. Mandelbrot, no entanto, comenta que essa citação apenas indica pouco cuidado ao examinar a curva e deficiência de imaginação geométrica, assegurando que torna-se muito difícil não associá-la com diversos aspectos da natureza.

Desta forma, esses foram os principais precursores, dentre outros que contribuíram para o desenvolvimento da geometria, dedicando-se com seus estudos a esta ciência, buscando métodos que satisfizessem a necessidade matemática da época, através da Geometria dos Fractais.

4.2 GEOMETRIA DOS FRACTAIS

A geometria dos fractais apresenta estruturas geométricas de grande complexidade, ligadas as formas da natureza, são imagens de objetos abstratos que possuem o caráter de onipresença por terem as características do todo infinitamente multiplicadas dentro de cada parte, escapando assim, da compreensão em sua totalidade pela mente humana.

Durante séculos, os objetos e os conceitos da filosofia e da geometria euclidiana foram considerados, como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. A descoberta da geometria não-euclidiana introduziu novas formas geométricas não definidas na Geometria de Euclides, os fractais. Assim, considera-se hoje que tais objetos retratam formas e fenômenos da natureza.

Em 1872, Karl Weierstrass encontrou o exemplo de uma função com a propriedade de ser continua em todo seu domínio, mas em nenhuma parte diferencial. O gráfico desta função é chamado atualmente de Fractal. Em 1904, Helge Von Koch, não satisfeito com a definição muito abstrata e analítica de Weierstrass, deu uma definição mais geométrica de uma função similar, atualmente conhecida como Koch Snowjloke (ou floco de neve de Koch), que é o resultado de infinitas adições de triângulo ao perímetro de um inicial como vimos na figura 3.3 deste capítulo. Cada vez que novos triângulos são adicionados, o perímetro cresce, e fatalmente se aproxima do infinito. Dessa maneira, o fractal abrange uma área finita dentro de um perímetro infinito.

Também houve muitos outros trabalhos relacionados a estas figuras, mas esta ciência só conseguiu se desenvolver plenamente a partir da década de 60, com o auxilio da computação. Um dos pioneiros a usar esta técnica foi Benoit Mandelbrot, um matemático que já vinha estudando essas figuras. Mandelbrot foi responsável por criar o termo fractal, e responsável pela descoberta de um dos fractais mais conhecidos, o Conjunto de Mandelbrot. Nesse conjunto podemos evidenciar que cada parte é semelhante ao conjunto inteiro.

Ampliações do Conjunto Mandelbrot

Observe nos exemplos abaixo, os retângulos destacam fragmentos ampliados em cada figura para melhor compreensão da Geometria Fractal.

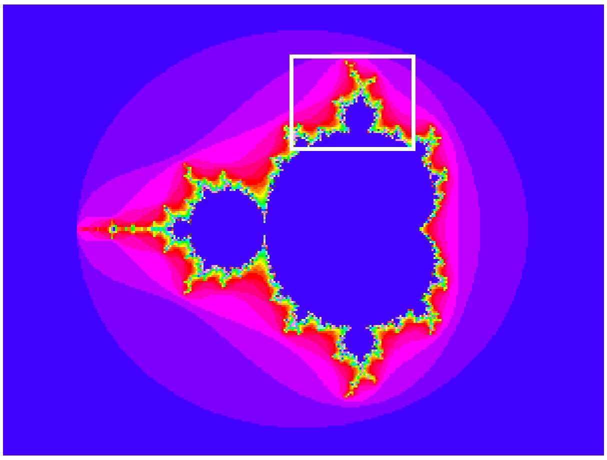


Figura: A

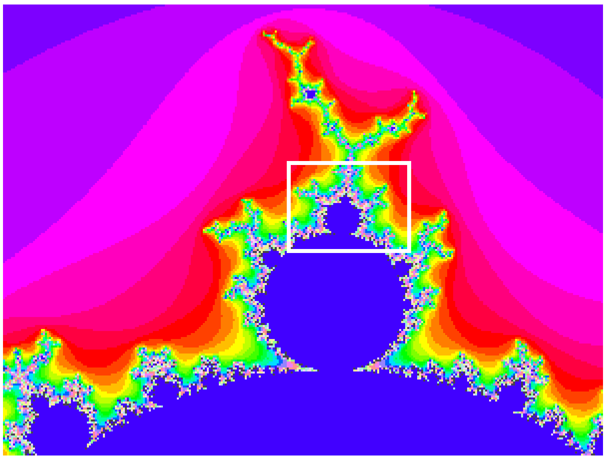


Figura: B

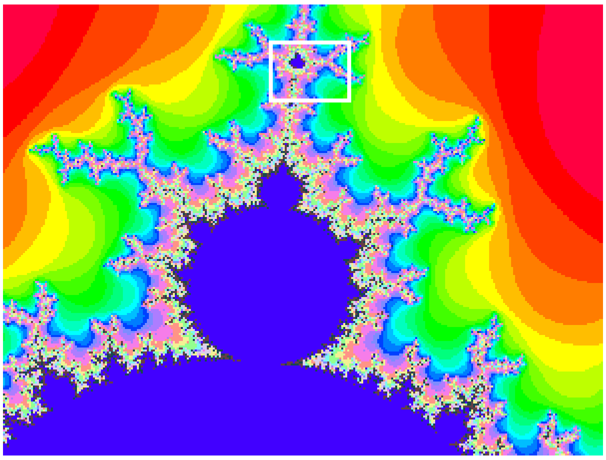


Figura: C

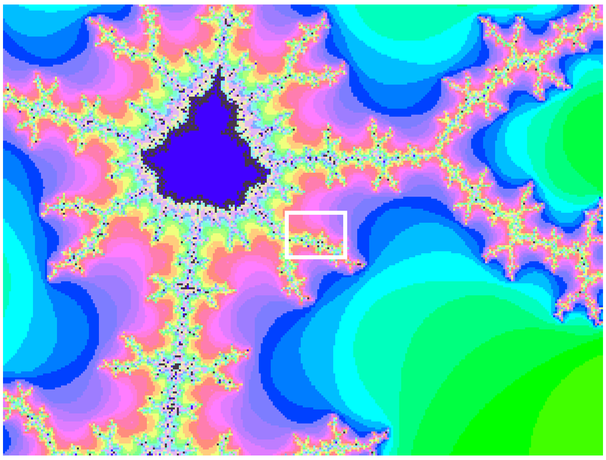


Figura: D

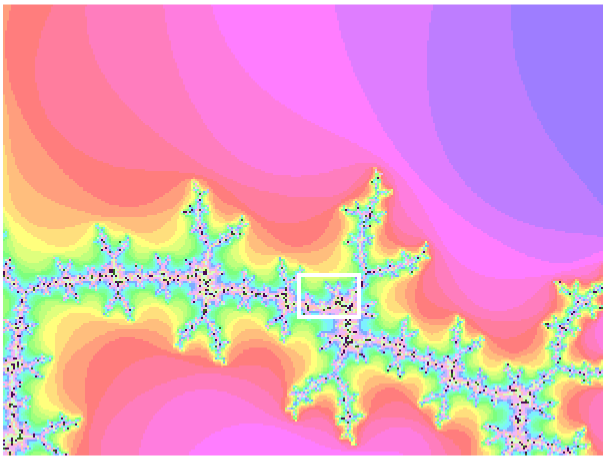


Figura: E

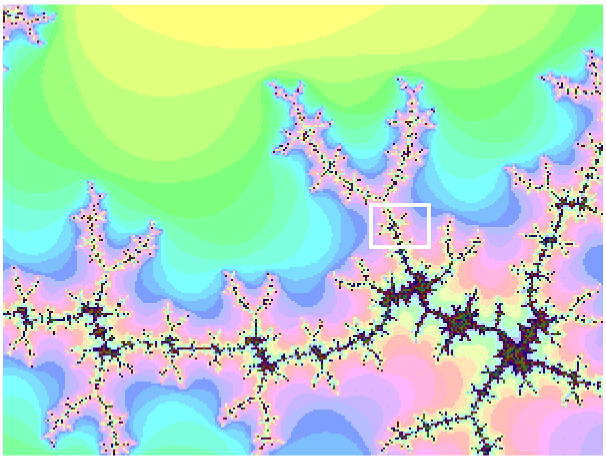


Figura: F

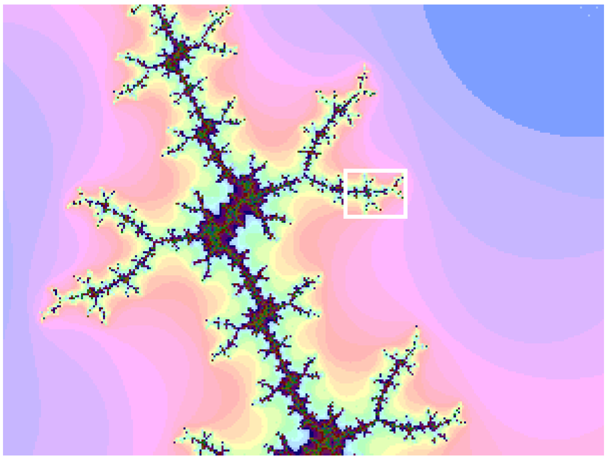


Figura: G

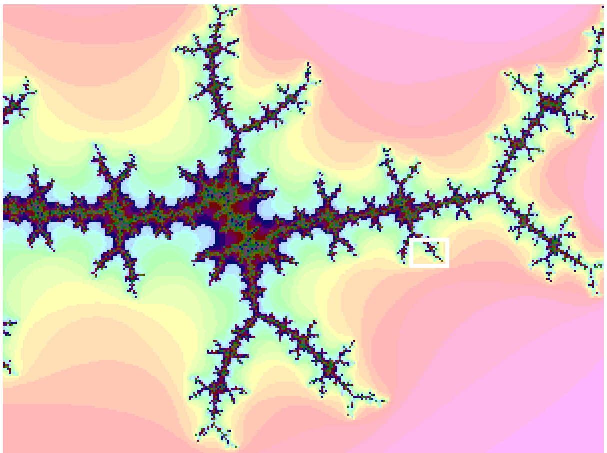


Figura: H

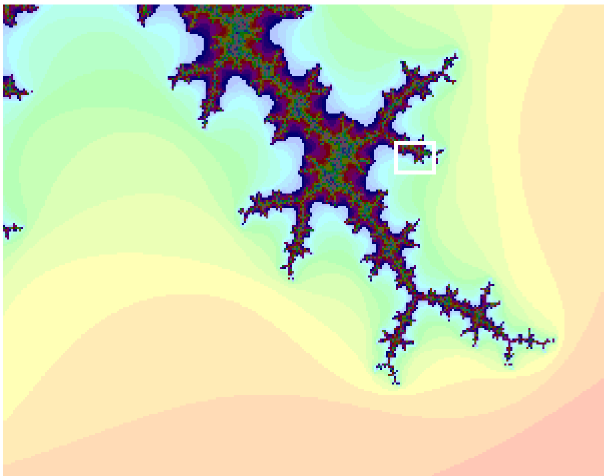


Figura: I

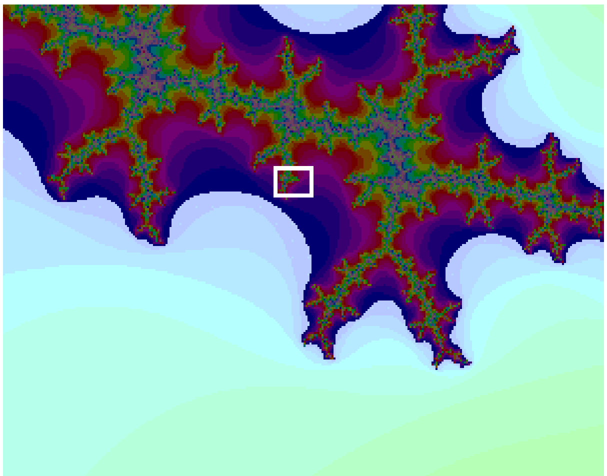


Figura: J

Essa geometria, não convencional, tem raízes remonta ao século XIX e algumas indicações neste sentido vêm de muito antes na Grécia Homérica, Índia, China, entre outros. Porém, somente há poucos anos, vem se consolidando com desenvolvimento dos computadores e o auxílio de novas teorias nas áreas da física, biologia, astronomia e matemática.

A ciência dos fractais pode ser utilizada para descrever diversos fenômenos na natureza, onde não podem ser utilizadas as geometrias tradicionais. Nuvens, montanhas, turbulências, árvores, crescimentos de populações, vasos sanguíneos e outras formas irregulares podem ser estudadas e descritas utilizando as propriedades dos fractais.

> Há alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou da sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, troncos de árvores não são hexágonos e rios não desenham espirais.
> Benoit Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature,1983, pg 17.

A observação por Mandelbrot [Man 1982] sobre a existência da “Geometria da Natureza” tem nos levado a pensar numa nova interpretação científica para as superfícies das nuvens, o perfil dos topos das florestas no horizonte, e o intricado arranjo móvel de penas nas asas de um pássaro quando ele voa. A geometria é preocupada em tornar objetivas nossas intuições espaciais. A geometria clássica provê uma primeira aproximação com estruturas de objetivos físicos, esta é a língua que nós usamos para comunicar os desenhos dos produtos tecnológicos, e, muito aproximadamente, as formas das criações naturais. Geometria Fractal é uma extensão de Geometria Clássica. Ela pode ser usada para fazer modelos precisos de estruturas físicas. Sendo assim uma nova linguagem na matemática.

4.3. OS FRACTAIS E SUA APLICAÇÃO NAS CIÊNCIAS

A natureza está repleta de figuras fractais, ao contrário do o mundo tecnológico que permanece essencialmente euclidiano. A tecnologia foi desenvolvida sem explorar a estrutura em várias escalas, apesar das forças da Física e de milhões de anos de evolução atestarem a importância dos fractais. Recentemente algumas indústrias ou ramos do conhecimento começaram a explorar as formas fractais.

Esse novo campo da matemática, como já esperávamos é muito amplo e sua aplicabilidade é ilimitada. Os Fractais vêem auxiliado em diversas áreas das ciências dando suporte a modernização e aperfeiçoamento da mesma. Citaremos algumas ciências e sua relação com os Fractais:

Medicina e Biologia: A dimensão fractal é usada na medicina como método de diagnóstico quantitativo e objetivo de várias patologias cardíacas, as quais nada mais são que a falta de regularidade nas batidas do coração. Taquicardia, batidas ectópicas, ritmos de Wenckebach, várias são as irregularidades, entre as quais a mais preocupante é a fibrilação. Este é um caso interessante: geralmente cada componente individual do coração cumpre sua função normalmente; porém, o coração como um todo não apresenta a coordenação periódica contração-distensão. O órgão se contorce freneticamente e o sangue não é bombeado. Pesquisadores têm estudado a dinâmica do coração, bem como condições de suspensão e indução da fibrilação. Isto tem permitido a criação de equipamentos desfibriladores mais eficientes. O câncer ainda é uma moléstia a ser vencida. Além de novas terapias, os cientistas estudam novas formas de diagnóstico para que a identificação de tumores seja precisa e cada vez mais prematura. Bem, uma das diferenças entre células sadias e doentes está nos diferentes padrões de crescimento de cada tipo. O exame destes padrões, utilizando recursos de geometria fractal, pode ser a chave para a criação de um sistema de detecção do câncer por computador (ver *Ciência Hoje, ago. 1998 - Medicina*). O *Grupo de Pesquisa em Visão Cibernética* do Instituto de Física de São Carlos (IFSC), da Universidade de São Paulo (USP), estuda as propriedades e as aplicações dos fractais. Este estudo tem permitido aos cientistas a caracterização da complexidade das células nervosas e neurônios. O grupo também aplica os conceitos de dimensão fractal no estudo de partículas de aerossol (solução na qual partículas sólidas ou líquidas estão dispersas em um gás). “A complexidade de uma partícula de um aerossol determina suas características aerodinâmicas. Um aerossol constituído por partículas mais lisas apresentará menor viscosidade para escoamento dentro de tubulações. Já um aerossol composto por partículas mais rugosas apresentará fluxo mais errático, permitindo maior possibilidade de choque com as paredes nas quais é injetado. Por exemplo, é interessante que um aerossol usado para transporte de medicamentos via inalação apresente fluxo bastante irregular, aumentando assim a sua efetividade da assimilação, através de choques, pelas paredes dos alvéolos pulmonares. Assim, fica clara a importância de caracterizarmos de modo objetivo e efetivo a rugosidade dessas partículas, o que pode naturalmente ser feito utilizando-se a dimensão fractal”. *Ciência Hoje, jun. 2002 - A outra Dimensão da Dimensão Fractal*. Na Biologia, a equação não-linear $xn+1=k.xn.(1-xn)$ é utilizada amplamente na descrição populacional de vários tipos de animais em diferentes habitats;

Artes Gráficas: os fractais se apresentam em forma de figuras e o inverso também é verdadeiro, ou seja, as imagens podem ser convertidas em fractais. Você deve se lembrar que os fractais são obtidos a partir de poucas instruções simples. Aplicando este princípio, pode-se comprimir grandes imagens e mesmo vídeos (que são seqüências de imagens), numa razão de até 10000 para 1. A criação de texturas é outra aplicação deste princípio. As texturas são utilizadas nos softwares de edição de imagem, possibilitando a criação de paisagens que “mostram” a realidade. A figura da copa de uma árvore, por exemplo, não será uma superfície de única cor verde, mas uma estrutura constituída de um conjunto aleatório de milhares de folhas, imitando quase que fotograficamente uma árvore real. Aplicações disto são os efeitos especiais utilizados no cinema e a fabricação de desenhos animados cada vez mais “reais”;

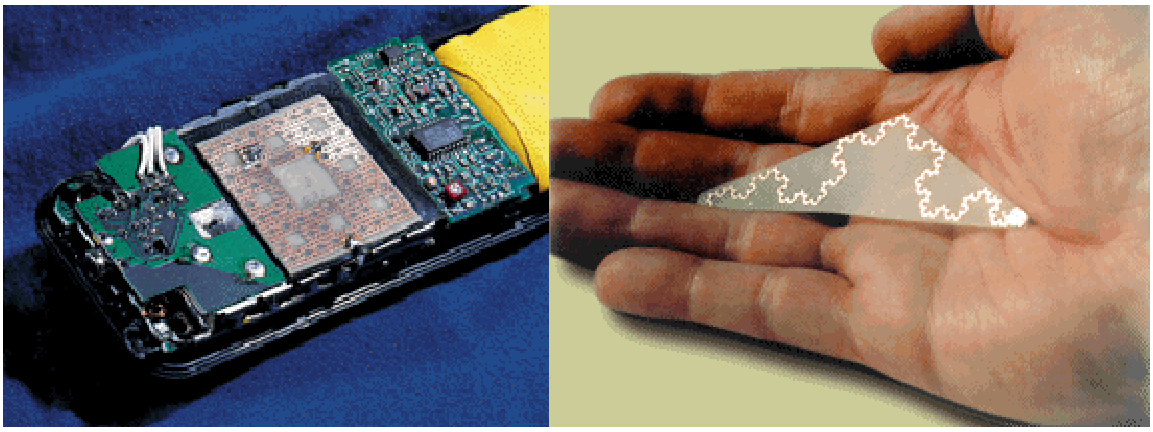
A Geografia: descrição e caracterização de falhas sísmicas e, por conseguinte, terremotos são obtidos através do estudo de sua estrutura fractal. Além de terremotos, outros fenômenos geológicos podem ser estudados como, por exemplo, a dinâmica dos vulcões;

Economia: na economia, as análises de comportamentos globais ajudam a entender os comportamentos locais e vice-versa. O estudo destas análises permite criar estratégias comerciais de médio e longo prazos.

Arte fractal: é criada utilizando-se funções matemáticas chamadas fractais e transformando os resultados dos cálculos em imagens, animações, música ou outro tipo de mídia. Imagens fractais são os gráficos resultante dos cálculos, e animações são seqüências desses gráficos. Música fractal transforma os resultados do cálculo em sons. Geralmente, mas não exclusivamente, utilizam-se computadores para processá-los, devido à complexidade da matemática envolvida.

> Na opinião de José Teixeira Coelho Neto, a linguagem dos fractais tem tudo a ver com o presente. "Há muito tempo existem uma discussão na Arquitetura entre modernos e pós-modernos", exemplifica. Segundo ele, os modernos encaram os ângulos retos, a geometria clean como algo mais evoluído, enquanto os pós-modernos brigam contra esse conceito. "Assim, a geometria dos fractais vem como um reforço para o pós-modernismo."
> Revista SUPERINTERESSANTE Outubro 1994 - Edição 85 - Pg.23

Antenas fractais: O desenho de antenas é um problema complicado. Os desenhos comuns são sensíveis apenas a uma grama estreita de freqüências e não são eficientes se o seu tamanho for inferior a um quarto do comprimento de onda. Este é um problema para a construção de antenas pequenas, tais como as que são usadas nos telefones portáteis. A resposta das antenas fractais difere acentuadamente da das tradicionais, pois são capazes de funcionar de forma óptima simultaneamente em várias freqüências. Assim, fazendo das antenas fractais uma excelente alternativa para aplicações de banda larga.



A Motorola começou a usar antenas fractais em vários modelos dos seus telemóveis e anunciou que estas são 25% mais eficientes que o tradicional pedaço de fio condutor.

5. RELAÇÃO ENTRE GEOMETRIA EUCLIDIANA E A GEOMETRIA DOS FRACTAIS

A base da Geometria Euclidiana como já evidenciamos é formada por três entes primitivos (ponto, reta e plano) que são aceitos sem definições. A construção de um fractal por mais complexa que seja necessita destes elementos.

Segundo Euclides existem figuras que não tem dimensão, ou melhor, tem dimensão zero. É o caso dos pontos, como este ponto final (.). Uma linha, por sua vez considerada a distância entre dois pontos quaisquer, é algo com uma única dimensão. Já a capa de um livro, de acordo com a geometria euclidiana, tem duas dimensões, pois para conhecer qual a sua área, por exemplo, é necessário multiplicar dois números – o do comprimento pelo da largura. Do mesmo modo, um bloco possui três dimensões, porque precisamos multiplicar três números (comprimento, largura e altura) para saber qual o seu volume Euclides estava certo. Mas não resolveu todo o problema.

Para entendermos melhor a fundamentação da Geometria de Euclides é necessário nos reportarmos aos fatos do passado:

Conta à tradição que há mais de dois mil anos, Euclides enquanto caminhava pela praia, notou que areia, vista como um todo se assemelhava a uma superfície contínua e uniforme, embora fosse composta por pequenas partes visíveis. Desde então empenhou-se em provar que todas as formas da natureza podiam ser reduzidas a formas geométricas simples (cubos,triângulos, prismas...).

Concentrado, sobretudo nas formas, deixou de lado um elemento crucial neste tipo de análise: a dimensão. No entanto, inconscientemente, esta foi à chave do seu pensamento inicial: um grão de areia apresenta isoladamente três dimensões (comprimento, altura e profundidade), enquanto que a superfície arenosa da praia visualmente plana (duas dimensões). Ou seja, a fronteira do conjunto tridimensional composto pelo grão de areia bidimensional.

Contudo Euclides nos deixou um conjunto de livros de matemática, Os Elementos, que pode ser considerado um dos meios importantes textos na história da matemática. Nesse monumental conjunto de 13 volumes Euclides reuniu toda geometria conhecida em sua época, ou seja, os vários resultados originalmente obtidos por outros matemáticos anteriores a ele e seus trabalhos originais. O fato importante é que Euclides apresentou esses resultados dentro de uma estrutura logicamente coerente e simples. Ele até mesmo apresentava provas de teoremas matemáticos que haviam sido perdidos.

Euclides deduzia, entre vários outros resultados, as propriedades dos objetos geométricos a partir de um pequeno conjunto de axiomas. Axiomas são afirmações que não possuem prova, mas são aceitas como auto-evidentes. Por esse motivo Euclides é considerado o "pai da geometria" e o fundador do chamado "método axiomático da matemática".

O sistema geométrico apresentado por Euclides nos livros que formam os Elementos durante muito tempo foi considerado "a geometria", a qual era a única disponível que podia ser usada na vida diária sem contradições aparentes. "Os Elementos" de Euclides foram os fundamentos do ensino de geometria praticamente até o inicio século XX.

Hoje a geometria apresentada por Euclides chamada de "Geometria Euclidiana" para distingui-la das outras formas de geometria chamadas "Geometrias não-Euclidianas" que foram descobertas no século XIX.

As geometrias não-Euclidianas cresceram a partir de mais de 2000 anos de investigação sobre o quinto postulado de Euclides, um dos axiomas mais estudados em toda a história da matemática. A maior parte dessas investigações envolveram tentativas de provar o quinto postulados. Se eles tivessem sido bem sucedidos teriam mostrado que esse postulado seria na verdade um teorema. Na verdade "Os Elementos" consistem de duas partes: a primeira é formada por teoremas que são provados sem o auxilio do quinto postulado e formam o que chamamos de "Geometria Absoluta" e a parte formada por teoremas que estão baseados no quinto postulado e que formam a "Geometria Euclidiana" propriamente dita.

> A negação do quinto postulado não levaria a uma contradição e que geometrias diferentes da de Euclides poderiam existir.
> Gauss, Theoria motus corporum coelestium,1809, pag 18.

A geometria fractal é caracterizada por duas escolhas: a escolha de problemas no seio do caos da natureza, uma vez descrever todo o caos seria uma ambição sem esperança e sem interesse, e a escolha de ferramentas no seio da matemática, pois procurar aplicações das matemáticas pelo simples fato de serem belas acabou sempre por causar dissabores. (...) depois de progressivamente amadurecidas, estas duas escolhas, criaram algo de novo: entre o domínio do caos desregulado e a ordem excessiva de Euclides existe agora uma nova zona ordem fractal.

Na tabela baixo você encontrará uma relação clara e precisa entre essas duas geometrias:

Relacionando a Geometria dos Fractais com a Geometria Euclidiana

Geometria Euclidiana	Geometria dos Fractais
Tradicional (mais de 2000 anos)	Contemporâneo (últimos trinta anos)
Baseada em tamanho ou escala pré-definida	Tamanho ou escala especifica
Adequada a objetos criados pelo homem	Adequada a formas naturais
Dimensão inteira {0,1,2,3}	Dimensão real no intervalo [0,3]
Descrita por fórmulas e equações	Uso de algoritmos recursivos

No entanto, podemos afirmar que onde parou Euclides começou a geometria fractal: no conceito de dimensão, que veio inovar o campo da geometria com idéias revolucionárias que foram introduzidas embasadas no quinto postulado de Euclides como já foi evidenciado anteriormente, trazendo grandes benefícios, pois a utilização da mesma vem auxiliar nos cálculos de figuras irregulares relacionadas à natureza, dando maior precisão nos seus resultados assegurando uma maior sustentabilidade no desenvolvimento das ciências.

> "As imagens que calculei com a minha teoria matemática assemelhavam-se curiosamente à realidade e se eu podia imitar a natureza, era porque provavelmente teria descoberto um de seus segredos".
> Benoit Mandelbrot, The fractal Geometry of Nature,1983, pg 68.

6. CONCLUSÃO

Nosso trabalho de pesquisa foi feito com base numa vasta pesquisa bibliográfica sobre os Fractais procurando subsidio pra entender e ampliar os nossos conhecimentos, negar ou afirmar nossas hipóteses e assim desenvolver um trabalho serio que nos proporcionasse um respaldo concreto e seguro em relação a esse novo campo da matemática estruturando dessa forma todo nosso documentário.

Pensamos e acreditamos que todas as hipóteses foram respondidas de forma clara e objetiva e ficamos muito satisfeitos com o resultado obtido em nosso trabalho, pois o mesmo nos proporcionou a abertura de novos horizontes, a reafirmação de nossos conceitos e idéias a respeito do tema proposto, como também descobrimos um universo repleto de informação que vieram a somar, construir e unificar as novas convicções.

Portanto, os Fractais eles vêm explicar e mostrar as duvidas que tínhamos ao relacionar por exemplo a folha de uma planta com uma das formas geométrica definidas pela Geometria Euclidiana, o que acarretava uma serie de frustrações na mente humana. Hoje sabemos então que temos uma nova parceira na resolução de cálculos desse porte. Outra questão estava intrinsecamente relacionada a gêneses dos Fractais e através dos estudos e pesquisas constantes descobrimos que a Geometria dos Fractais surgiu quando da não-comprovação e aceitação do quinto postulado de Euclides, ou seja, não se conseguiu provar eficientemente essa antiga "verdade" que instigou a curiosidade dos matemáticos daquela época a desenvolver uma nova área da matemática num provável erro de Euclides. Geometria essa que foi aceita e veio a auxiliar muito no nosso dia-a-dia evitando até que catástrofes aconteçam já que os cálculos são muitos mais eficientes e precisos do que a Geometria Tradicional.

E de grande relevância citarmos a familiaridade e aplicação dos Fractais em outras ciências como Geografia, Medicina, Economia, Artes, Música, entre outras, de forma qualitativa contribuindo para o desenvolvimento de técnicas/estudos (exames computadorizados; estudos de partículas de aerosol; descrição populacional de vários tipos de animais em diferentes habitats; criação de texturas; descrição e caracterização de folhas sísmicas e por conseguintes terremotos; dinâmicas dos vulcões; a analise dos comportamentos globais que ajudam a entender os comportamentos locais e vice-versa; criação de imagens, som, animação, música; entre outros), permitindo criar estratégias para o progresso e avanço das mesmas.

É importante ressaltar que geralmente, mais não exclusivamente, utilizam-se computadores para processar as técnicas acima citadas, devido à complexidade da matemática envolvida.

Partindo desse pressuposto concluímos que foi de grande relevância toda nossa pesquisa, pois hoje temos um conhecimento mais aprofundado desse novo campo da matemática que ainda encontra-se mistificada, desconhecido para maior parte da população. Nós como futuros docentes temos ciência da importância de difundir esta temática, apresentando-a de forma contextualizada, o que não é difícil, pois podemos encontrá-la em qualquer lugar, já que a relacionamos de forma clara e objetiva com a natureza que nos cerca e não é diferente para nenhum de nós.

REFERÊNCIAS

ACHESON, D. From **Calculus to Chaos**. New York: Oxford University Press. 1997.

GUEDES. E. M. **Geometria fractal**: que geometria é essa?. São Leopoldo, 1998. Minicurso (I ENEM)- UNISINOS.

http://www.**fractarte.com.br/artigos/superinteressante.php**.

KASNER. E.; NEWMAN, J. **Matemática e imaginação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

LORENZ, N. E. **A essência do caos**. Brasília: Universidade de Brasília, 1996.

MANDELBROT, B. **Objetos fractuais**: forma, acaso e dimensão. Lisboa: Grávida, 1991.

MLODINOW, Leonard. **A Janela de Euclides**. 3ª ed. São Paulo: Geração Editorial, 2005.

MOREIRA, I. C. Fractuais. In: NUSSENZVEIG, G. H. M. (org.). **Complexidade & Caos**. Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA, 1999.

PEITGEN, H.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Fractals for classroom, part one, introduction to fractals and chãos**. New York: Springer-Verlag, 1993.

RICIERI, A. P. **Fractais e caos**: a matemática de hoje. São Paulo: Prandiano, 1990.

REZENDE, Eliane Quelho Frota. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo, SP: Imprensa Oficial, 2000

ANEXOS

ANEXO I

A MATEMÁTICA DO DELÍRIO

O artista digita uma equação. A partir daí, o computador faz literalmente milhões de cálculos e vai desenhando os fractais, imagens cuja riqueza de detalhes só perde para a própria realidade.

Segundo o velho Euclides, matemático grego que viveu dois milênios atrás, existem figuras que não têm dimensão, ou melhor, têm dimensão ZERO. É o caso dos pontos, como este ponto final (.). Uma linha, por sua vez - considerada a distância entre dois pontos quaisquer -, é algo com uma única dimensão. Já a capa de SUPERINTERESSANTE, de acordo com a geometria euclidiana, tem duas dimensões. Pois, para conhecer qual a sua área, é necessário multiplicar dois números - o do comprimento pelo da largura. Do mesmo modo, um bloco possui três dimensões, porque precisamos multiplicar três números (comprimento, largura e altura) para saber qual o seu volume. Euclides estava certo. Mas não resolveu todo o problema.

Os contornos das montanhas, a superfície dos pulmões humanos, a trajetória das gotículas de água quando penetram na terra - existe uma infinidade de fenômenos na natureza que não podem ser descritos por essa geometria toda certinha. É preciso apelar para complicados cálculos que resultam nas chamadas dimensões fracionárias - como a dimensão 0,5, por exemplo, típica de um objeto que é mais do que um simples ponto com dimensão zero, porém menos do que uma linha com dimensão 1. Só a chamada geometria dos fractais consegue descrevê-lo.

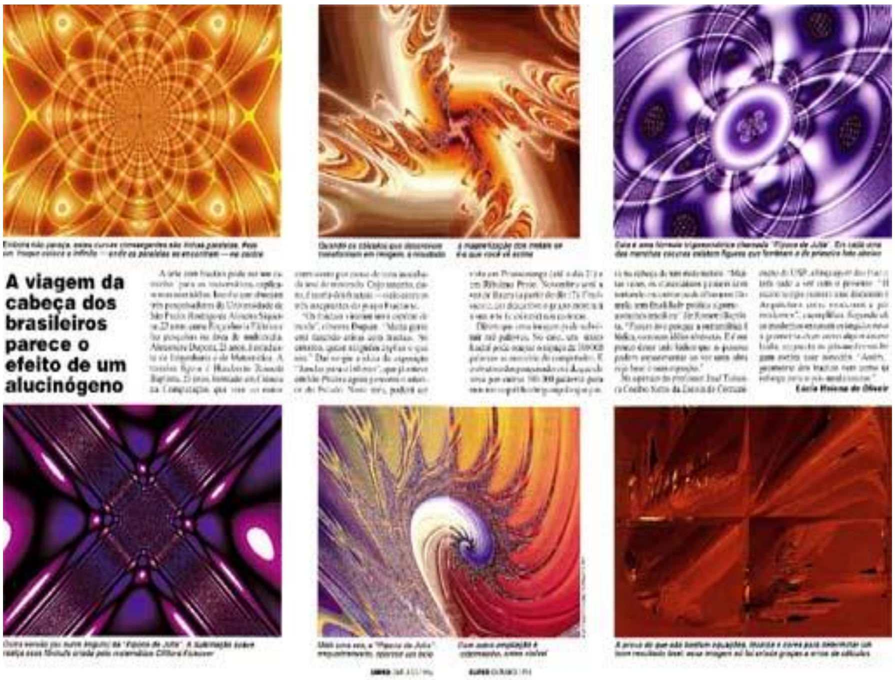
Essa nova área das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação. Para os biólogos, ajuda a compreender o crescimento das plantas. Para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrin-cadas. Para os médicos, dá uma nova visão da anatomia interna do corpo. Enfim, não faltam exemplos. Um dos mais belos - e, sem dúvida, o mais colorido - é o uso dos fractais na arte. Quando os computadores são alimentos com equações, eles criam magníficos desenhos abstratos. É o que você poderá ver nas ilustrações do inglês Greg Sams e no trabalho do **Grupo Fractarte**, formado por três pesquisadores paulistanos.

Planetas com florestas estranhas, mares cor de laranja e montanhas com milhares de picos pontiagudos - são alguns dos mundos imaginados pelo artista gráfico Greg Sams, que trabalha em Londres, na Inglaterra. Na verdade, ele faz uma espécie de colagem com o auxílio do computador, como se recortasse pedaços redondos de fractais para criar um planeta ou uma estrela de contorno regular.

"O que mais me fascina é procurar novos padrões de um mesmo fractal para construir as minhas imagens", diz o artista. Isso porque quanto mais você se aproxima de um fractal, mais detalhes você consegue enxergar nele. Parece não ter fim - é uma visão do infinito. Desse modo, Sams vai ampliando determinada área dezenas ou centenas de vezes - e sempre observa desenhos diferentes.

Diferentes, porém parecidos. Pois não basta ter dimensão fracionária para ser um fractal. É preciso que o objeto seja auto-semelhante: suas partes devem se parecer muito entre si e representar o todo. Ou seja, um fractal pode ser comparado a uma couve-flor - se alguém cortar um pedaço dela verá que ele tem a cara da verdura inteira. A terceira e última característica de um fractal é ser fruto de um processo iterativo. No jargão dos matemáticos, isso significa repetir uma fórmula inúmeras vezes. É dessa repetição que surge a imagem.

A arte com fractais pode ser um caminho para os matemáticos explicarem as suas idéias. Isso é o que almejam três pesquisadores da Universidade de São Paulo. Rodrigo de Almeira Siqueira, 23 anos, cursa Engenharia Elétrica e faz pesquisas na área de multimídia. Alexandre Dupont, 25 anos, é estudante de Engenharia e de Matemática. A terceira figura é Humberto Rossetti Baptista, 23 anos, formado em Ciência da Computação, que vive no maior corre-corre por causa de uma inacabada tese de mestrado. Cujo assunto, claro, é teoria dos fractais - o elo entre os três integrantes do grupo Fractarte.


A viagem da cabeça dos brasileiros parece o efeito de um alucinógeno

"Os fractais viraram uma espécie de moda", observa Dupont. "Muita gente está fazendo coisas com fractais. No entanto, quase ninguém explica o que são." Daí surgiu à idéia da exposição "Janelas para o Infinito", que já esteve em São Paulo e agora percorre o interior do Estado. Neste mês, poderá ser vista em Pirassununga (até o dia 21) e em Ribeirão Preto. Novembro será a vez de Bauru (a partir do dia 17). Finalmente, em dezembro o grupo mostrará a sua arte (e ciência) aos cariocas.

Dizem que uma imagem pode substituir mil palavras. No caso, um único fractal pode ocupar o espaço de 100 000 palavras na memória do computador. E o objetivo dos pesquisadores é de que ele sirva por outras 100 000 palavras para mostrar ao público leigo aquilo que passa na cabeça de um matemático. "Muitas vezes, os matemáticos perdem anos tentando encontrar ou decifrar uma fórmula sem finalidade prática alguma - ao menos imediata" diz Rossetti Baptista. "Fazem isso porque a matemática é lúdica, com suas idéias abstratas. E é um pouco desse lado lúdico que as pessoas podem experimentar ao ver uma obra cuja base é uma equação."

Na opinião do professor José Teixeira Coelho Neto, da Escola de Comunicação da USP, a linguagem dos fractais tem tudo a ver com o presente. "Há muito tempo existem uma discussão na Arquitetura entre modernos e pós-modernos", exemplifica. Segundo ele, os modernos encaram os ângulos retos, a geometria clean como algo mais evoluído, enquanto os pós-modernos brigam contra esse conceito. "Assim, a geometria dos fractais vem como um reforço para o pós-modernismo."

ANEXO II

Biografia de Benoit Mandelbrot

Benoît Mandelbrot nasceu na Polónia em 1924, a sua família emigrou para França, devido à 2ª GM. Tinha um tio, Szolem Mandelbrot, que era professor de Matemática no "Collège de France" e era o responsável pela sua educação.

Benoît frequentou o "Lycze Rolin" em Paris, depois estudou em Lyon, e, mais tarde, foi para os Estados Unidos da América. Por fim estudou na École Polytechnique e na Sorbonne, em Paris e no Instituto Californiano de Tecnologia. A sua carreira académica dividiu-se principalmente entre França e os EUA.

Em 1958 criou uma Associação com os laboratórios de investigação da IBM em Nova Iorque. Em 1987, tornou-se professor em Yale.

Mandelbrot, começou a ficar um pouco insatisfeito em relação à Geometria Clássica, uma vez, que ao explorar e resolver diversos problemas, os pontos, as linhas rectas, os círculos, entre outros, não demonstraram ser abstracções adequadas para compreender a complexidade da natureza.

A pesquisa de Mandelbrot forneceu teorias matemáticas para o fenómeno da probabilidade errática e métodos de auto-semelhanças em probabilidades. Levou a cabo uma pesquisa sobre processos esporádicos, termodinâmica, linguagens naturais, astronomia, geomorfologia, gráficos e arte com a ajuda do computador e criou e desenvolveu a geometria fractal.

Este prodigioso e ilustre matemático contemporâneo, é conhecido mundialmente como sendo o único responsável pelo enorme interesse nos chamados objectos fractais. Hoje em dia a sua geometria é conhecida através de bonitas gravuras coloridas que, enriqueceram tanto a matemática moderna como a arte.

A obra Clássica de Benoît Mandelbrot está reproduzida e editada pelo Gradiva com o título “Objectos Fractais”.

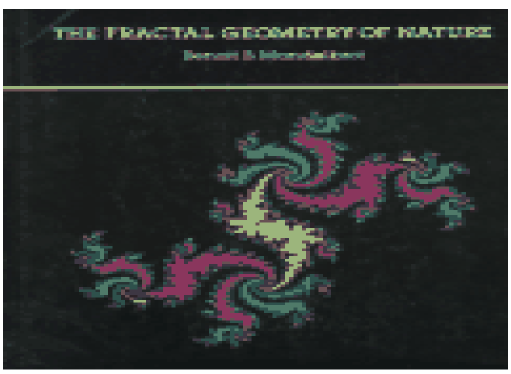
O último livro deste verdadeiro “génio” intitulado “Fractals and Scaling in Finance”, foi posto recentemente à venda ao público. Este seu trabalho recolhe sobretudo as suas contribuições mais relevantes no estudo da estatística e da economia.

Com a introdução da colecção de figuras Mandelbrot, em 1980, ele mostrou que tão complexos fenómenos podiam ser criados e descritos por simples regras repetidas, Mandelbrot orientou o estudo de uma completa geração de matemáticos, cientistas da computação e até artistas, no sentido de produzirem e estudarem as bonitas imagens que tinham sido criadas.

Outras Obras de Benoît Mandelbrot:

- Logique, Langage et Théorie de l’ Information (com L. Apostel e A Morf), de 1957
- Fractais: Forma, Hipóteses e Dimensão, de 1977

A Geometria Fractal da Natureza, de 1982



ANEXO III

Biografia de Euclides

Euclides era um matemático grego, não se sabe ao certo onde e quando nasceu, mas viveu em Alexandria na primeira metade do séc. III a.C. Dizia-se que era o mais novo que os primeiros discípulos de Platão e mais velho que os de Arquimedes. Acredita-se que Euclides tenha recebido ensinamentos matemáticos dos primeiros discípulos de Platão.

Euclides foi um dos sábios chamados para ensinar na escola criada por Ptolomeu, na Alexandria em 306 A.C., chamada "Museu". Diz-se que tinha uma grande capacidade e habilidade de exposição e algumas lendas o caracterizam como um bondoso velho. Conta Prado de Bizâncio (412 - 485 d.C.) que Ptolomeu perguntava a Euclides se não havia um caminho mais rápido de se aprender geometria e a sua resposta era: "Não há estrada real para geometria."

A sua grande obra foi, "Os Elementos", constituída por treze capítulos sobre Aritmética, Geometria e Álgebra.

Desapareceram vários livros de Euclides, e um dos mais lamentáveis desaparecimentos foi o de "Porismas de Euclides", que poderia conter aproximações da Geometria Analítica e Pappus dá-nos uma noção do que um porisma como algo entre um teorema (em que alguma coisa é proposta para resolver) e um problema (em que alguma coisa é proposta para construir).

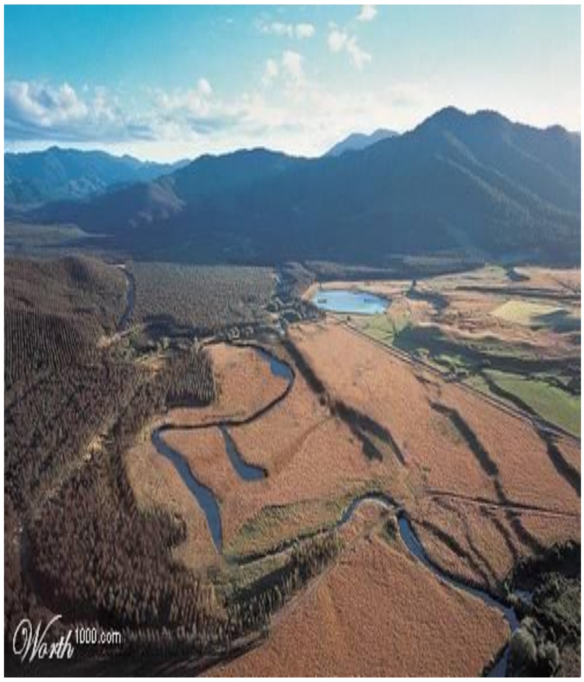
Cinco das obras de Euclides sobreviveram. Uma dessas obras foi "Óptica" onde, indica seu estudo de perspectiva e desenvolve uma teoria contrária à de Aristóteles, segundo a qual o olho envia os raios que vão até o objecto que vemos. Em "Os Fenômenos" discorre sobre Geometria esférica para utilização dos astronomos. "A Divisão" contém 36 proposições relativas à divisão de configurações planas. "Os Dados" forma um manual de tabelas, servindo como guia de resolução de problemas, com relação entre medidas lineares e angulares num círculo dado.

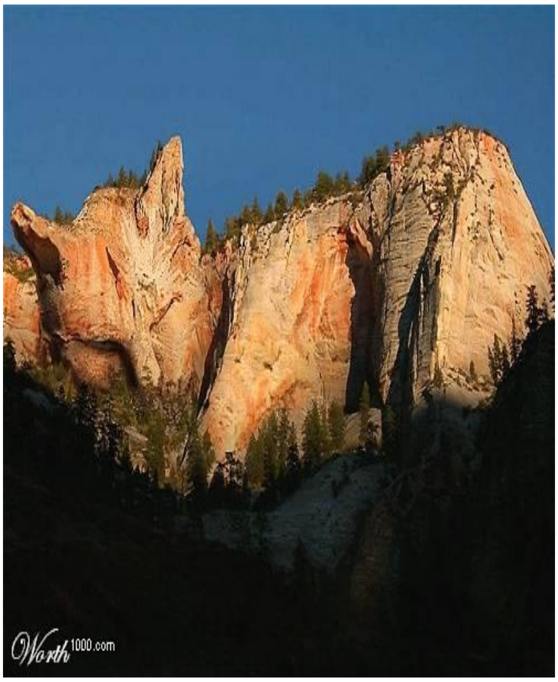
Uma edição completa das obras de Euclides foi publicada em Leipzig, com o título Opera omnia, em oito volumes, com texto grego e latim em (1883-1916).

Bibliografia: Fundamentos de Matemática Elementar

ANEXO IV

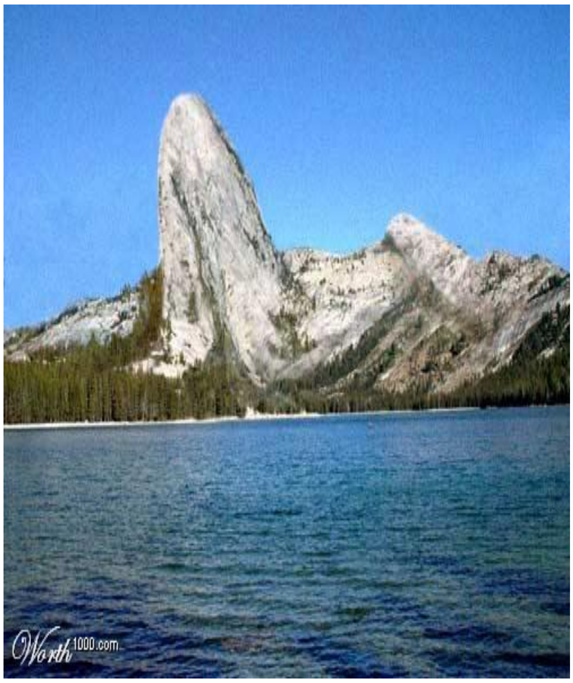
Imagens fantásticas encontrada na natureza que tem formas irregulares com detalhes infinitos e complexos, ou seja, Fractais




Worth1000.com


Worth1000.com


Worth1000.com


Worth1000.com

ANEXO V

Galeria de Fractais

A-origem-do-universo

Anel-de-Areia-Zoom

Epsilon

Fragmentos

Spiral-Flower

UltraRosaFlower

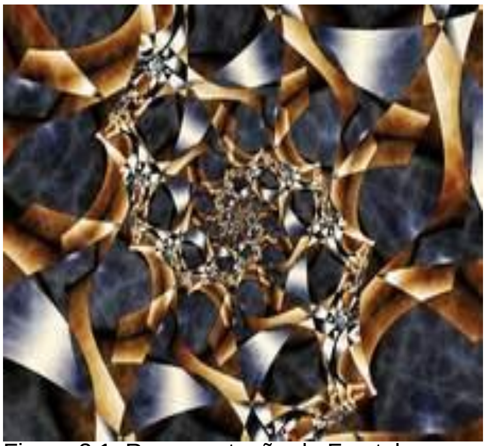


Figura 3.1: Representação do Fractal

Julia-Waves

Figura 3.2 Apresentação do Fracta lQuadrivium-

alpha-blue