UNIVERSIDADE TIRADENTES

MARIA GLEICE HENRIQUES BARBOSA
ROSANA CONCEIÇÃO MORAIS MARTINS

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS COMO APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

PROPRIÁ
2009

MARIA GLEICE HENRIQUES BARBOSA
ROSANA CONCEIÇÃO MORAIS MARTINS

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS COMO APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Monografia apresentada à Universidade Tiradentes como um dos pré-requisitos para a obtenção da graduação em Matemática.

ORIENTADOR:
ANDRÉ LUIZ NOGUEIRA

PROPRIÁ
2009

MARIA GLEICE HENRIQUES BARBOSA
ROSANA CONCEIÇÃO MORAIS MARTINS

MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS COMO APLICAÇÃO DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para obtenção da graduação em Matemática.

Aprovada em ____/____/____.
Banca Examinadora

---

nome do orientador(a)
Instituição

---

nome do orientador(a)
Instituição

---

nome do orientador(a)
Instituição

Aos nossos pais e amigos.

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças:

À Universidade Tiradentes e sua direção, ao nosso orientador professor André Luiz Nogueira e às nossas famílias por todo o apoio e compreensão ao longo deste período.

Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.

Lobachevsky

RESUMO

Esta pesquisa é o nosso Trabalho de Conclusão de Curso. Nele desenvolvemos um estudo sobre máximos e mínimos dirigido para funções de duas variáveis e a partir do qual verificamos a resolução de problemas práticos. Encontra-se dividido essencialmente em duas unidades. A primeira unidade faz referência a funções de duas variáveis, compreendida em sete capítulos. Inicialmente determinamos a definição de função, o ponto de partida de todo o trabalho. No segundo capítulo falamos de derivada a partir da geometria analítica em conceitos de limite e tangência. O terceiro capítulo é um dos mais extensos da unidade, expomos teoremas e definições que sustentam a discussão dos valores extremos de uma função. No quarto capítulo trabalhamos mais acentuadamente a interpretação geométrica dos máximos e mínimos a partir do crescimento e decrescimento de uma função. No quinto capítulo vemos concavidade e ponto de inflexão. No sexto capítulo temos o teste da derivada segunda. O capítulo sete compreende a resolução de problemas baseado no que foi visto nos capítulos anteriores desta unidade, são dados exemplos de aplicação na geometria, economia, comércio e física. Os aspectos da unidade I são necessários para melhor entendimento da unidade posterior. A segunda unidade compreende quatro capítulos, trataremos dos mesmos conceitos, porém estendidos para máximos e mínimos de funções de duas variáveis. Lembrando que passamos a trabalhar em espaços dimensionais diferentes e na maioria dos casos uma interpretação geométrica do problema faz toda a diferença. Faz-se necessário reformular as definições e teoremas de forma que se adapte ao novo espaço em questão. No primeiro capítulo desta unidade reformulamos o conceito de função, pois passamos a lidar com duas variáveis independentes. No segundo capítulo, vemos a questão do limite e continuidade de funções. E trabalhamos mais detalhadamente a pesquisa nos conceitos de derivadas, assunto abordado no terceiro capítulo desta unidade e que é a ferramenta principal do trabalho. É necessário que este fique bem compreendido para podermos dar continuidade ao estudo. No quarto e último capítulo, falamos dos valores extremos voltado para funções de duas variáveis, vemos alguns critérios necessários e em seguida aplicações práticas. Vemos a resolução de alguns problemas de otimização tanto para valores extremos locais assim como também para os absolutos.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo Diferencial; Máximos e Mínimos; Aplicações.

ABSTRACT

This research is our Conclusion Course. In it we develop a study on maximum and minimum directed to functions of two variables, and from which we see the resolution of practical problems. It is divided essentially into two units. The first unit refers to functions of two variables, comprised of seven chapters. Initially we determine the function definition, the starting point of all the work. In the second chapter we talk about derived from the analytic geometry concepts of limit and contact. The third chapter is one of the largest unit, expose theorems and definitions that underpin the discussion of the extreme values of a function. In the fourth chapter work more clearly the geometric interpretation of the maximum and minimum from the growth and decline of a function. In the fifth chapter we concavity and inflection point. In the sixth chapter we have the second derivative test. Chapter seven covers the resolution of problems based on what was seen in previous chapters of this unit are given examples of the geometry, economics, trade and physics. The aspects of the drive I needed for better understanding of the unit later. The second unit consists of four chapters, we will treat the same concepts, but extended to the maximum and minimum of functions of two variables. Recalling that we work in different dimensional spaces and in most cases a geometric interpretation of the problem makes all the difference. It is necessary to reformulate the definitions and theorems in a way that suits the new space in question. In the first chapter of this unit reformulate the concept of function, because we are dealing with two independent variables. In the second chapter, we see the question of limits and continuity of functions. And we work in more detail the research on the concepts of derivatives, subject addressed in the third chapter of this unit and that is the main tool of work. It is necessary that this be well understood if we continue the study. In the fourth and final chapter, we speak of the extreme values-oriented functions of two variables, we need some criteria and then practical applications. We solve some optimization problems for both local extreme values as well as for the absolute.

KEY WORDS: Differential calculus, maxima and minima; Applications.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho procuramos desenvolver um estudo sobre máximos e mínimos voltado para funções de duas variáveis. Nosso objetivo principal é demonstrar a utilidade das teorias para aplicações em problemas das áreas do conhecimento humano, onde a Matemática está presente e requer a otimização do problema. É um tema de grande relevância para as ciências, em síntese busca a melhor maneira de se fazer algo, contudo seu estudo exige o conhecimento do Cálculo Diferencial e a análise de seus conceitos.

Estruturamos o tema em duas unidades e estas, por sua vez, em capítulos, com o intuito de tornar a leitura agradável e facilitar o entendimento. A primeira unidade é dedicada ao estudo de funções de uma variável, de forma breve, apenas como pré-requisito para a segunda unidade, onde focamos as funções de duas variáveis e trabalhamos conceitos que dão suporte ao estudo e aplicações dos valores extremos.

UNIDADE I

1 NOÇÃO DE FUNÇÃO

O conceito de função se refere essencialmente à correspondência entre conjuntos. Uma função associa a elementos de um conjunto elementos de um outro conjunto. Esta associação ou correspondência é uma função. Em outros termos, dados os conjuntos A e B (eles poderiam ser iguais), uma função $f$de A em B, em símbolos: f: A → B, é uma lei ou regra que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B. Para indicar que y veio de x pela função f adotamos a notação $y = f(x)$.

2 A DERIVADA

Uma das técnicas mais importantes da matemática consiste em linearizar, isto é, substituir umas funções por outras que "aproximem" a dada função e que sejam lineares.

2.1 A DERIVADA COMO A INCLINAÇÃO DA RETA TANGENTE

A palavra tangente vem do latim tangens, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva, ou seja, deve ter a mesma direção e sentido que a curva no ponto de contato.

Problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Segundo Euclides a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, como denotado na Figura 1, no entanto essa definição não se aplica a toda curva, como mostra a Figura 2

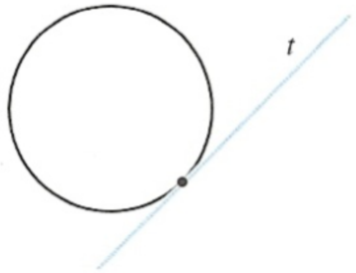


Figura 1

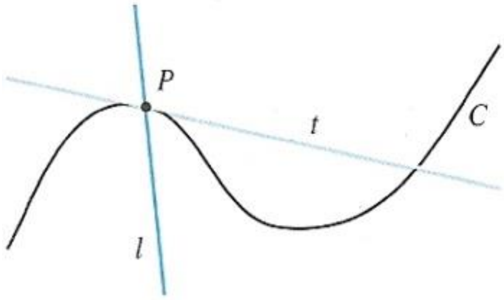


Figura 2

Para obter adequadamente a definição de reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto, devemos primeiro determinar a inclinação da reta (comumente denotada por m) tangente no ponto e só então o ponto de tangência.

Para encontrar o coeficiente angular m de uma reta t, precisamos de um ponto arbitrário Q do gráfico. Observe as figuras abaixo:

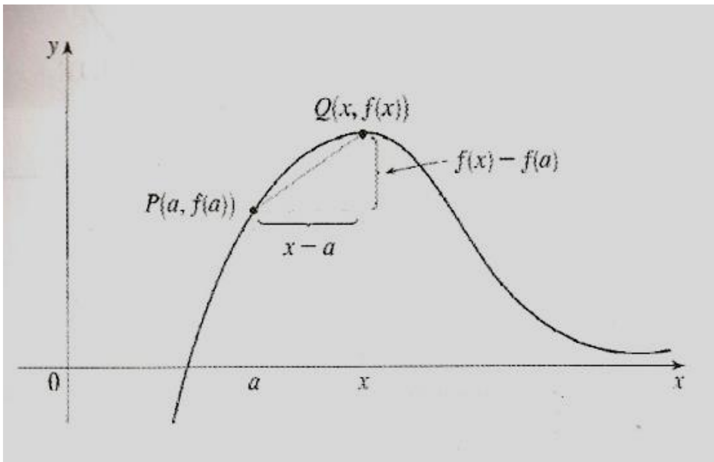


Figura 3

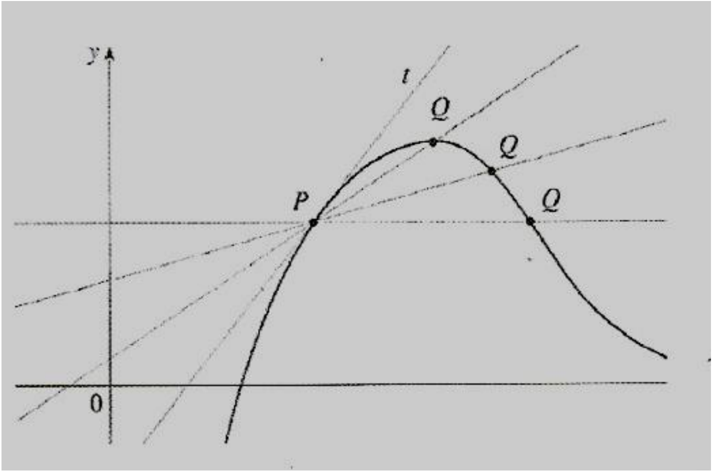


Figura 4

t é uma reta secante do gráfico e podemos deslocar o ponto Q de tal forma que se aproxime do ponto P.

2.1.1 DEFINIÇÃO: A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta que passa por P e tem inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

desde que esse limite exista.

EXEMPLO 01: Encontre uma equação da reta tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P(1,1)$.

SOLUÇÃO:

Antes de encontrar a equação da reta tangente à parábola, precisamos determinar a inclinação dessa reta. Temos que $a = 1$ e $f(x) = x^2$, logo a inclinação é

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 1) = 2$$

Usando a forma ponto-inclinação da reta encontramos que uma equação da reta tangente em (1,1) é

$$y - y_1 = m\,(x - x_1) \;\; \rightarrow \;\; y - 1 = 2(x - 1) \text{ ou } y = 2x - 1$$

Podemos utilizar uma outra expressão para obter a inclinação da reta tangente. Seja $h = x - a$ e $x = a + h$. Logo a inclinação da reta secante PQ é

$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f\,(a)}{h}$$

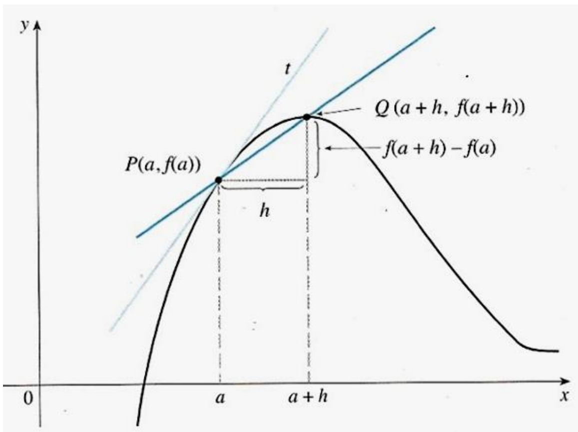


Figura 5

A figura 5, acima ilustra o caso $h > 0$ estando Q a direita de P. Na situação em que $h < 0$, o ponto Q estará à esquerda de P.

Quando x tende a a, h tende a 0 pois $h = x - a$. Assim a expressão para a inclusão da reta tangente na Definição 01 fica

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f\,(a)}{h} \qquad (2)$$

EXEMPLO 02: Encontre uma equação da reta tangente à hipérbole $y = 3/x$ no ponto (3,1).

SOLUÇÃO:

Vamos determinar a inclinação da reta. Temos que $f(x) = \frac{3}{x}$, $a = 3$ e $x = 3 + h$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f\,(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f\,(3)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{(3+h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3-(3+h)}{3+h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{3+h} = \frac{-1}{3}$$

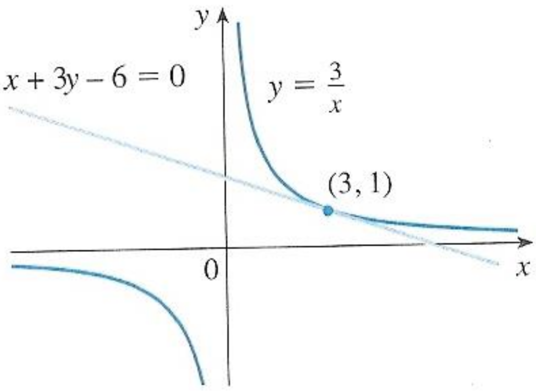


Figura 6

Logo, uma equação da reta tangente à hipérbole no ponto (3,1) é $y - y_1 = m\,(x - x_1)$

$y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 3)$ *ou* $x + 3y - 6 = 0$

2.2 NOTAÇÕES DA DIFERENCIAÇÃO

Usamos a notação tradicional $y = f(x)$ para indicar que a variável independente é x enquanto y é a variável dependente. Outras notações alternativas para a derivada são:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Os símbolos D e $\frac{d}{dx}$ são chamados de operadores diferenciais, pois indicam a operação de diferenciação, que é o processo de cálculo de uma derivada.

O símbolo $\frac{dy}{dx}$, introduzido por Leibniz é um sinônimo para $f'(x)$. Trata-se de uma notação muito útil, principalmente quando usada em conjunto com a notação de incremento. Reescrevemos a definição de derivada como

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

2.2.1 DEFINIÇÃO: A derivada de uma função f em um número a denotada por $f'(a)$ é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Existindo esse limite, podemos afirmar que a inclinação da reta tangente ao gráfico $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é precisamente a derivada de f calculada em a.

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$, e h tende a 0 se e somente se x aproximar-se de a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enumerar a definção de derivada é

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{6}$$

EXEMPLO 03: Ache a derivada de f se $f(x) = 3x^2+12$

SOLUÇÃO:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[\,3(a+h)^2 - 12] - (3a^2 + 12)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6(ah) + 3h^2}{h} = 6a$$

Logo a derivada de f é a função f' definida por $f'(a) = 6a$

2.3 DERIVAÇÃO E CONTINUIDADE

2.3.1 DEFINIÇÃO: Uma função f é diferençável em a se $f'(x)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

O fato de uma função ser contínua num intervalo não implica que ela seja derivável nesse número. No entanto se uma função é derivável também é contínua. É o que diz o teorema a seguir.

2.3.2 TEOREMA: Se f for diferenciável em a, então f é contínua em a.

DEMONSTRAÇÃO:

Para provar que f é contínua em a é preciso satisfazer três condições:

i) $\lim_{x \to a} f(a)\ existe$ ii) $\lim_{x \to a} f(x)\ existe$ iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Por hipótese f é derivável em a. Logo $f'(a)$ existe, como pela equação (6) $f(a)$ precisa existir, caso contrário o limite da equação (6) não terá sentido. Logo a condição (i) é verdadeira em a. Consideremos a gora

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)]$$

Podemos escreve

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[(x - a)\frac{f(x)\ -\ f\,(a)}{x - a}\right]$$

Como

$$\lim_{x \to a} (x - a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)\ -\ f\,(a)}{x - a}\right] = f'(a)$$

Aplicando a Lei do Produto e a equação (6), escrevemos

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}(x - a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

Então,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a) + f(a)] = \lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] + \lim_{x \to a} f(a) = 0 + f(a)$$

que resulta

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Dessa igualdade decorre que as condições (ii) e (iii) para continuidade de f em a são satisfeitas. ■

Uma função f pode deixar de ser derivável em um número a por uma das seguintes razões:

1. Se o gráfico de uma função f tiver uma "quina" ou "dobra", então o gráfico de f não terá tangente nesse ponto e f não será diferençável, pois $f'(a)$ terá os limites esquerdo e direito diferentes;

2. Se a função deixar de ser derivada, como denota o **Teorema 2.3.2**;

3. E quando uma curva tem uma reta tangente vertical em $x = a$, isto é, f é contínua em a e $\lim_{x \to a} |f'(x)| = \infty$

A figuras abaixo ilustram as três possibilidades de uma função deixar de ser diferenciável.

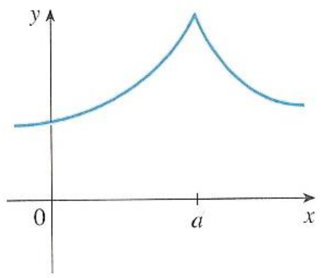


Figura 6

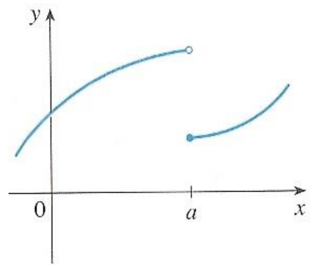


Figura 7

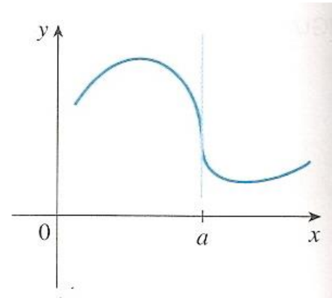


Figura 8

2.4 DERIVADA DE FUNÇÕES COMPOSTAS

A regra da cadeia é um dos mais importantes teoremas do cálculo, utilizado para encontrar a derivada de funções compostas.

2.4.1 TEOREMA: Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em $g(x)$, então a função composta $f \circ g$ será derivável em x, e $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Na notação de Leibniz, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja x_1 qualquer número do domínio de g, tal que g seja derivável em x_1 e f seja derivável em $g(x_1)$. Vamos formar a função F definida por

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f\big(g(x_1)\big)}{t - g(x_1)}, & se\ t \neq g(x_1) \\ f'\big(g(x_1)\big), & se\ t = g(x_1) \end{cases} \qquad (i)$$

Então,

$$\lim_{t \to g(x_1)} F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)}$$

Da definição: $f'(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ a função no segundo membro da fórmula acima $(F(t))$, é $f'(g(x_1))$.

Logo, $\lim\limits_{t \to g(x_1)} F(t) = f'(g(x_1))$ (ii). Mas de (i) $f'(\mathrm{g}(x_1)) = F\big(g(x_1)\big)$. Substituindo essa igualdade em (ii), obtemos $\lim\limits_{t \to g(x1)} F(t) = F\big(g(x_1)\big)$. Portanto, F é contínua em $g(x)$. E (i),

$$F(t) = \lim_{t \to g(x_1)} \frac{f(t) - f(g(x_1))}{t - g(x_1)} \; se \; t \neq g(x_1)$$

Multiplicando ambos os lados dessa equação por $t - g(x)$, obtemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[\, t - g(x_1)] \qquad se \; t \neq \mathrm{g}(x_1)$$

(iii) é verdadeira, mesmo que $t = \mathrm{g}(x_1)$, pois o primeiro membro é

$$f(g(x_1)) - f(g(x_1)) = 0$$

e o segundo membro é $F\big(g(x_1)\big)[\, g(x_1) - g(x_1)] = 0$.

Logo a restrição em (iii) de $t \neq \mathrm{g}(x_1)$ não é necessária e reescrevemos

$$f(t) - f(g(x_1)) = F(t)[\, t - g(x_1)] \qquad (iv)$$

Seja, agora, h a função composta

$$f \circ g, \text{ tal que } h(x) = f(g(x)) \qquad (v)$$

Então, se o limite existir,

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x1} \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x - x_1}$$

Substituindo (v) no segundo membro dessa igualdade obtemos

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} \frac{F\big(g(x)\big)[g(x) - g(x_1)]}{x - x_1}$$

Assim, se o limite existir

$$h'(x_1) = \lim_{x \to x_1} F\big(g(x)\big) \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{g(x) - g(x_1)}{x - x_1} \qquad (vii)$$

Como F é contínua em $g(x_1)$,

$$\lim_{x \to x_1} F\big(g(x)\big) = F\big(g(x_1)\big) \qquad (viii)$$

Mas de (i), $F(g(x_1)) \;=\; f'(g(x_1))$. Substituindo em (viii), obtemos

$$\lim_{x \to x_1} F\big(g(x)\big) = F'\big(g(x_1)\big) \qquad (ix)$$

Além disso, como g é derivável em x_1, $\lim_{x \to x_1} \frac{g(x)-g(x_1)}{x-x_1} = g'(x_1)$. Substituindo de (ix) e dessa equação em (vii) e trocando $h'(x_1)$ por $(f \circ g)'(x_1)$, temos

$$(f \circ g)'(x_1) = f'(g(x_1))g'(x_1)$$

que é o teorema da regra da cadeia com x substituído por x_1. ■

2.5 DERIVAÇÃO IMPLÍCITA

Geralmente encontramos funções onde uma variável é expressa em funções de outra, ou seja, $y = f(x)$. No entanto, há situações em que não é fácil solucionar um problema explicitamente. Então utilizamos o metodo da diferenciação implícita, que consiste em diferenciar os lados da equação em relação a x e resolver a equação resultante para y'.

EXEMPLO 04: Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 + 9$, no ponto $(1,2)$.

SOLUÇÃO:

Vamos derivar implicitamente em relação a x.

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = \;0 \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Logo, no ponto (1,2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$. Uma equação da reta tangente é, então

$y \;-\; 2 \;=\; -\frac{1}{4}(x \;-\; 1)\;\; ou \;\; x + 4y - 9 \;=\; 0$

2.8 DERIVADAS DE ORDEM SUPERIOR

Se a função f for derivável, então f' é a chamada derivada primeira de f. Se a derivada de f' existr será a derivada segunda de f, ou seja, f'', e assim por diante.

A derivada enésima da função f, onde n é o número inteiro positivo maior do que 1, é a derivada $(n-1)$ésima de f', denotada por $f^{(n)}$, assi, podemos escrever f como sendo $f^{(0)}$.

EXEMPLO 05: Ache todas as derivadas da função f definida por $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$

$$f'''(x) = 192x + 30$$

$$f^{(4)}(x) = 192$$

$$f^{(5)}(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geq 5$$

Em geral, podemos interpretar uma derivada segunda como uma taxa de variação. O exemplo mais conhecido é a aceleração

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

A taxa de variação instantânea da velocidade em relação ao tempo é denominada aceleração $a(t)$. Assim, a função aceleração é a derivada da função derivada e é, portanto, a derivada segunda da função posição:

$$a(t) = v(t) = s'(t)$$

3 VALORES EXTREMOS: MÁXIMO E MÍNIMO

No capítulo anterior vimos que a inclinação geométrica de derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato nos possibilita aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráficos. Ela pode ser usada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos onde a derivada é zero. Também podemos encontrar os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente. Contudo o emprego das derivadas no esboço de gráficos requer a utilização de definições e teoremas que veremos.

3.1 DEFINIÇÃO: A função f terá um valor máximo relativo (máximo local) em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x nesse intervalo.

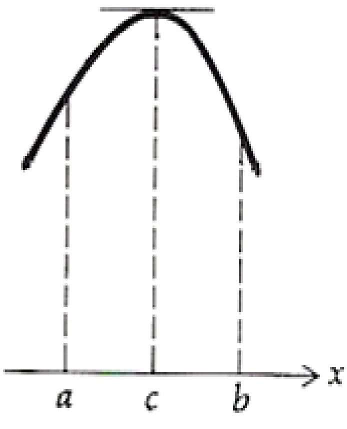


Figura 1

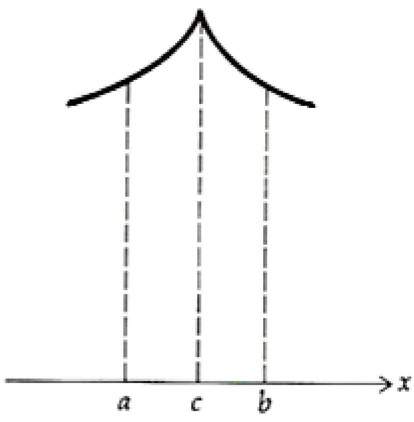


Figura 2

As figuras 1 e 2 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor máximo relativo em c.

3.2 DEFINIÇÃO: A função f terá um valor mínimo relativo (mínimo local) em c se existir um intervalo aberto contendo c, no qual $f(x)$ esteja definida, tal que $f(c) \leq f\ (x)$ para todo x nesse intervalo.

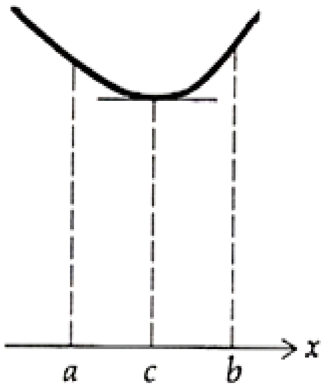


Figura 3

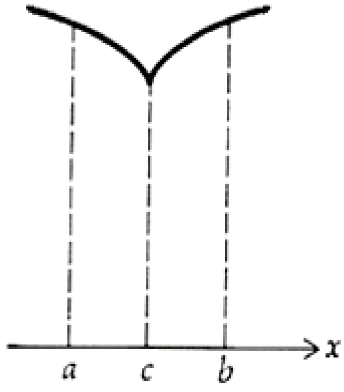


Figura 4

As figuras 3 e 4 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo relativo em c .

Se a função f tiver um máximo relativo em c ou um mínimo relativo, então diz-se que f tem um extremo relativo em c.

3.3 DEFINIÇÃO: A função f terá um valor máximo absoluto (máximo global) num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \geq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor máximo absoluto de f no intervalo.

3.4 DEFINIÇÃO: A função f terá um valor mínimo absoluto (mínimo global) num intervalo, se existir algum número c no intervalo, tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo. Em tal caso, $f(c)$ será o valor mínimo absoluto de f no intervalo.

Um extremo absoluto de uma função num intervalo é um valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto em um intervalo dado.

EXEMPLO 01: Suponha que f seja a função definida por $f(x) = 2x$.

Um esboço do gráfico de f em (1,4) está na figura abaixo. A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 em (1,4). Não há valor máximo absoluto de f em (1,4), pois, $\lim\limits_{x \to 4}(x) = 8$, mas $f(x)$ é sempre menor do que 8 no intervalo dado.

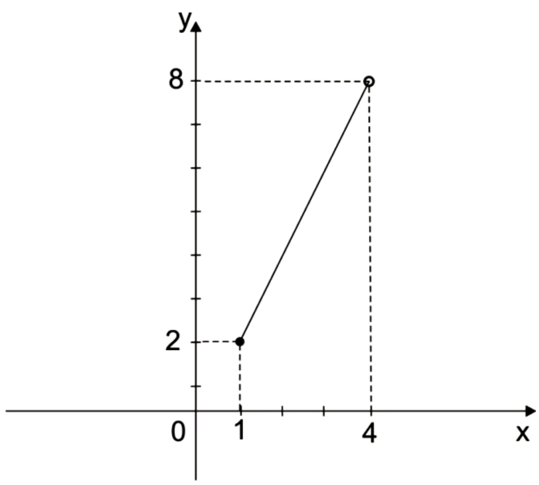


Figura 5

EXEMPLO 02: Considere a função definida por $f(x) = -x^2$.

Um esboço do gráfico de f em $(-3, 2)$ está na figura abaixo. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em $(-3, 2)$. Não há valor mínimo absoluto de f em $(-3, 2)$, pois $\lim\limits_{x \to -3} f(x) = -9$, mas $f(x)$ é sempre maior do que -9 no intervalo dado.

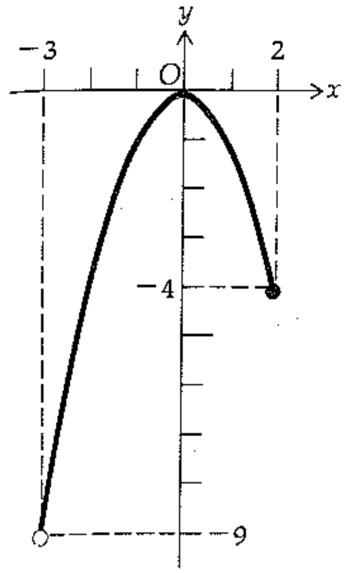


Figura 6

EXEMPLO 03: O gráfico da função f definida por $f\ (x) =\ x^2 - 4x + 8$.

É uma parábola e o seu esboço está na figura abaixo. O ponto mais baixo da parábola está em $(2{,}4)$ e a parábola abre-se para cima. A função tem um valor mínimo absoluto de 4 em 2 não há valor máximo absoluto de f.

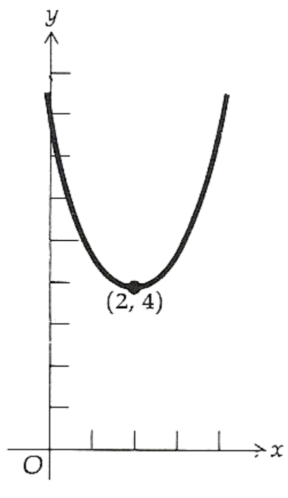


Figura 7

EXEMPLO 04: Se $f(x) = x^2$, então $f(x) \geq f(0)$, pois $x^2 \geq 0$ para todo x. Portanto $f(0) = 0$ é o valor mínimo absoluto e local de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola $y = x^2$. Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.

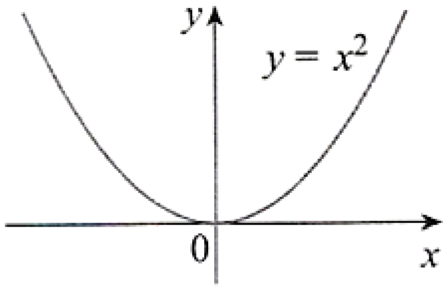


Figura 8

Valor mínimo 0, nenhum máximo

EXEMPLO 05: Do gráfico da função $f(x) = x^3$, observa-se que a mesma não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto. A função não tem nenhum valor extremo local.

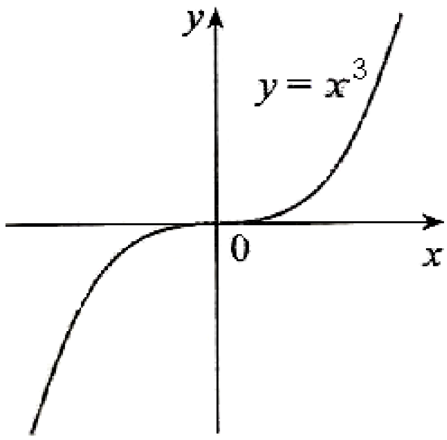


Figura 9

Nenhum mínimo, nenhum máximo.

O seguinte teorema será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

3.5 DEFINIÇÃO: Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de número crítico de f.

Uma condição necessária, mas não suficiente à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

EXEMPLO 06: Encontre os números críticos de $f(x) = x^{3/5}(4 - x)$.

SOLUÇÃO:

A regra do produto nos dá que:

$$f(x) = \frac{3}{5}x^{-2/5}(4 - x) + x^{3/5}(-1) = \frac{3(4 - x)}{5^{2/5}} - x^{3/5} = 3\,\frac{(4 - x) - 5x}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$

Portanto, $f'(x) = 0$ se $12 - 8x = 0$, isto é, $x = \frac{3}{2}$ e $f'(x)$ não existe quando $x = 0$. Assim, os números críticos são $3/2$ e 0.

3.6 TEOREMA DO VALOR EXTREMO: Se f for continua em um intervalo fechado $[a, b]$ então f assume um valor máximo absoluto $f(c)$ e um valor mínimo absoluto $f(d)$ em algum número c e d em $[a, b]$.

O Teorema do valor extremo está ilustrado nas figuras abaixo. Observa-se que um valor extremo pode ser assumido mais de uma vez.

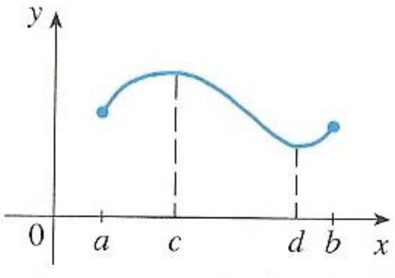


Figura 10

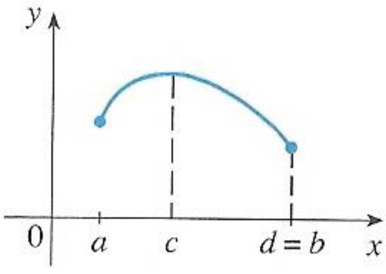


Figura 11

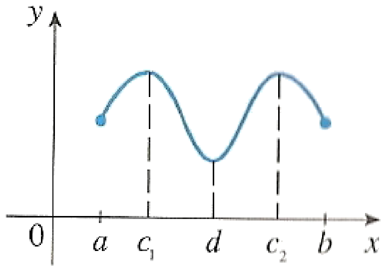


Figura 12

O Teorema do valor extremo afirma que uma função continua em um intervalo fechado tem um valor máximo e um mínimo, contudo, não diz como encontrar esses valores extremos.

Observe o gráfico abaixo:

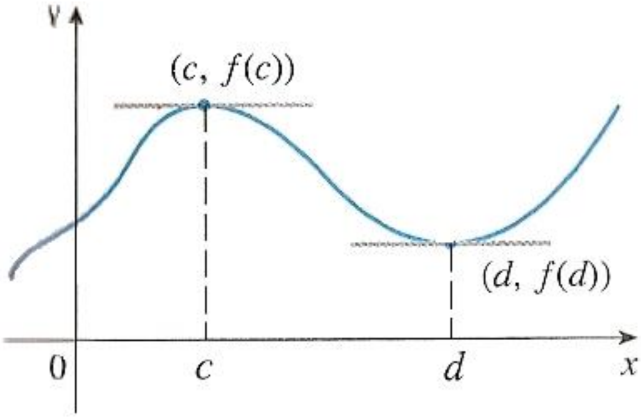


Figura 13

A figura acima mostra o gráfico de uma função com o máximo local em c e o mínimo local em d. Parece que nos pontos de máximo e de mínimo as retas tangentes são horizontais e, portanto, cada uma tem inclinação 0. Sabe-se que a derivada é a inclinação da reta tangente, assim, parece que $f'(c) = 0$ e $f'(d) = 0$. O Teorema a seguir afirma que isso é sempre verdadeiro para as funções diferenciáveis.

3.7 TEOREMA DE FERMAT: Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, e se $f'(c) = 0$ existir, $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponha que f tenha um máximo local em c. Então, de acordo com a definição acima, $f(c) \geq f(x)$ se x estiver suficientemente próximo de c, o que implica que se h estiver suficientemente próximo de 0, h sendo positivo ou negativo, então:

$$f(c) \geq f(c+h)$$

e portanto,

$$f(c+h) - f(c) \leq 0 \qquad (\mathbf{3.8})$$

Podemos dividir ambos os lados de uma desigualdade por um número positivo. Assim, se $h > 0$ e h for suficientemente pequeno, temos:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Tomando o limite à direita de ambos os lados dessa desigualdade, obtemos:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq \lim_{h\to 0^+} 0 = 0$$

Mas, uma vez que $f'(c)$ existe, temos

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

e assim mostramos que $f'(c) \leq 0$.

Se $h < 0$, então inverte-se o sentido da desigualdade $(\mathbf{3.10})$ quando dividimos por h:

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \qquad h < 0$$

Logo, tomando o limite esquerdo, temos:

$$f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

Foi mostrado que $f'(c) \geq 0$ e também que $f'(c) \leq 0$. Uma vez que ambas as desigualdades devem ser verdadeiras, a única possibilidade é que $f'(c) = 0$. ∎

Foi provado o Teorema de Fermat para o caso de um máximo local. O caso de mínimo local pode ser provado de forma análoga.

Os exemplos a seguir aconselham prudência contra interpretar muito profundamente o Teorema de Fermat. Não se pode esperar localizar os valores extremos equacionando $f'(x) = 0$ e resolvendo para x.

EXEMPLO 07: Se $f'(x) = x^3$, então $f'(x) = 3x^2$, logo $f'(0) = 0$. Porém, f não tem máximo nem mínimo em 0, como pode ser visto no gráfico abaixo. (Ou observe que $x^3 > 0$ para $x > 0$, mas $x^3 < 0$ para $x < 0$). O fato de que $f'(0) = 0$ significa simplesmente que a curva $y = x^3$ tem uma reta tangente horizontal em $(0,0)$. Em vez de ter máximo ou mínimo em $(0,0)$, a reta cruza sua tangente horizontal nesse ponto.

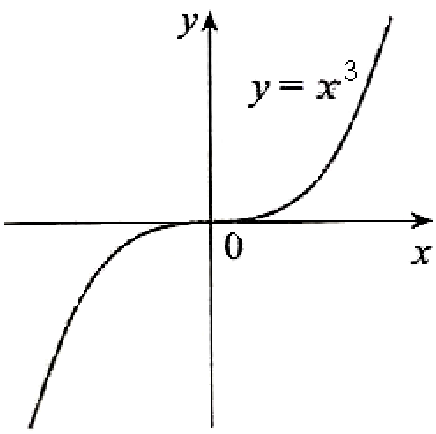


Figura 14

Se $f(x) = x^3$, então $f(0) = 0$, mas f não tem mínimo em máximo.

EXEMPLO 08: A função $f(x) = |x|$ tem seu valor mínimo (local e absoluto) em 0. Contudo, esse valor não pode ser encontrado equacionando-se $f'(x) = 0,\ f'(0)$ não existe.

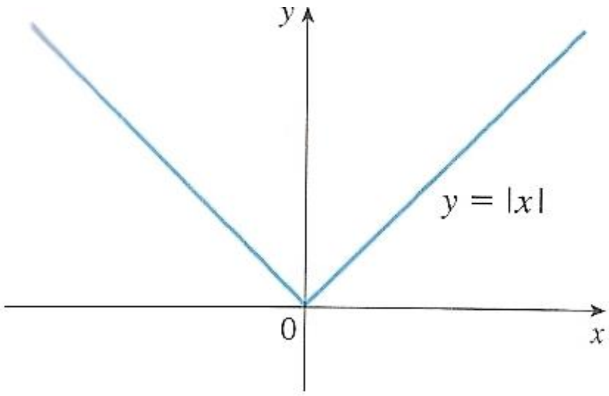


Figura 15

Se $f(x) = |x|$, então $f(0) = 0$ é um valor mínimo, mas $f'(0)$ não existe.

Os exemplos (07) e (08) mostram que devemos ser muito cautelosos no uso do Teorema de Fermat. O exemplo (07) demonstra que, mesmo quando $f'(c) = 0$, não é necessário existir o máximo ou o mínimo em c, isto é, o inverso do Teorema de Fermat em geral é falso. Além disso, pode existir um valor extremo mesmo quando $f'(c) = 0$ não existir como o exemplo (07).

O Teorema de Fermat sugere que devemos pelo menos começar procurando por valores extremos de f nos números c onde $f'(c) = 0$ ou onde $f'(c)$ não existe. Esses números são denominados de números críticos.

Em termos de números críticos, o Teorema de Fermat pode ser reescrito como a seguir.

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c, então c é um número crítico de f. $\qquad \mathbf{(3.9)}$

3.10 MÉTODO DO INTERVALO FECHADO: Para encontrar um máximo ou um mínimo *absolutos* de uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ segue-se o seguinte procedimento.

1- Encontre os valores de f nos números críticos de f em $[a, b]$.

2- Encontre os valores de f nos extremos do intervalo .

3- O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, ao passo que o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

EXEMPLO 09: Encontre os valores absolutos máximo e mínimo da função .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1 \qquad\qquad -1/2 \leq x \leq 4$$

SOLUÇÃO:

Uma vez que f é contínua em $\left(-1/2, 4\right)$, podemos usar o método do intervalo fechado:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Uma vez que $f'(x)$ existe para todo x, os únicos números críticos de f ocorrem quando $f'(x) = 0$, isto é, $x = 0$ ou $x = 2$. Observe que cada um desses números críticos está no intervalo $\left[-1/2, 4\right]$. Os valores de f nesses números críticos são

$$f(0) = 1 \qquad\qquad f(2) = -3.$$

Os valores de f nos extremos do intervalo são $f(-1/2) = 1/8$, $f(4) = 17$.

Comparando-se esses quatro números, vemos que o valor máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Note que neste exemplo o máximo absoluto acorre em um extremo, enquanto o mínimo absoluto acontece em um número crítico. O gráfico de f está esboçado logo abaixo.

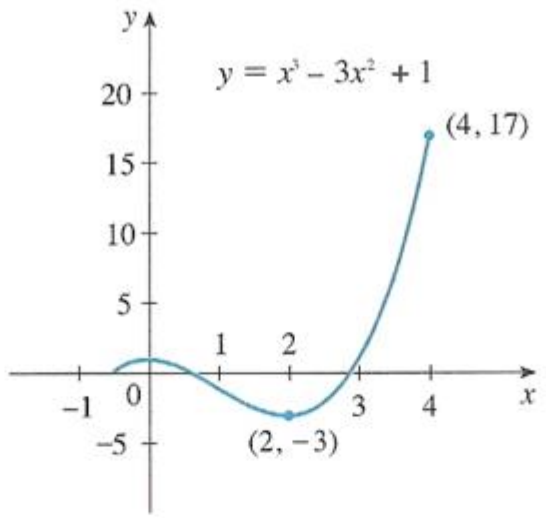


Figura 16

EXEMPLO 10: Ache os extremos absolutos de $f$em $\left(-2, {}^{1}/_{2}\right)$ se $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

SOLUÇÃO:

Como f é contínua em $\left(-2, {}^{1}/_{2}\right)$, o teorema do valor extremo pode ser aplicado. Para achar os números críticos de f, calculamos primeiros f'.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Como $f'(x)$ existe para todos os números reais, os únicos números críticos de f serão os valores de x para os quais $f'(x) = 0$. Vamos tomar $f'(x) = 0$. Logo,

$$(3x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = {}^{1}/_{3} \qquad \text{e} \qquad x = -1$$

Os números críticos de f são -1 e ${}^{1}/_{3}$ e cada um deles está no intervalo fechado $\left(-2, {}^{1}/_{2}\right)$. Os valores da função nos números críticos e nos extremos do intervalo são dados na tabela abaixo.

x	-2	-1	$^1/_3$	$^1/_2$
$f(x)$	-1	-2	$^{22}/_{27}$	$^7/_8$

O valor máximo absoluto de f em $\left(-2, {}^1/_2\right)$ é, portanto, 2, o que ocorre em -1, e o valor mínimo absoluto de f em $\left(-2, {}^1/_2\right)$ é -1, que ocorre no extremo esquerdo -2. A figura abaixo mostra um esboço de gráfico de f em $\left(-2, {}^1/_2\right)$.

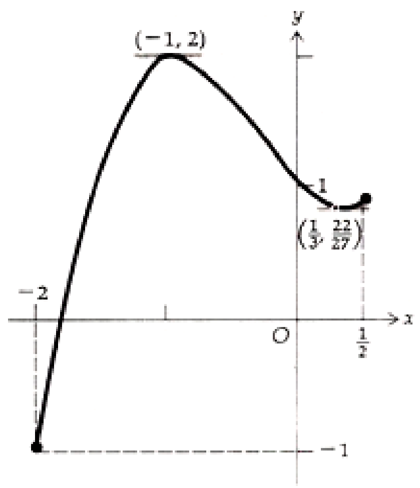


Figura 17

Seja f uma função contínua no intervalo fechado (a, b), derivável no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$ O matemático francês Minhel Rolle (1652 – 1719) provou que se uma função satisfaz essas condições, existe pelo menos um número c entre a e b para o qual $f'(c) = 0$

3.11 TEOREMA DE ROLLE: Seja f uma função, que satisfaça as seguintes hipóteses:

i) f seja contínua no intervalo fechado (a, b);

ii) f seja derivável no intervalo aberto (a, b);

iii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

Então existe um número c no intervalo aberto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Será considerado dois casos:

Caso 1: $f(x) = 0$ para todo x em (a, b);

Então, $f'(x) = 0$, para todo x em $(a. b)$; logo, qualquer número entre a e c pode ser tomado como c.

Caso 2: $f(x)$ não se anula para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b). Como f é contínua no intervalo fechado (a, b), do teorema do valor extremo, f tem um valo máximo e um valor mínino absoluto em (a, b). De (iii), $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.

Além disso, $f(x)$ é zero para todo x em (a, b). logo, f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 de (a, b), ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 de (a, b), ou ambos. Assim, para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, existe um extremo absoluto num ponto interior ao intervalo (a, b).

Logo, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como por hipótese existe $f'(c)$, segue do **Teorema 3.7** que $f'(c) = 0$. Isso prova o teorema.

Pode existir mais de um número no intervalo aberto (a, b), para o qual a derivada de f seja zero. Isso é ilustrado geometricamente no gráfico abaixo, onde a reta tangente é horizontal no ponto onde $x = c_1$ e também no ponto onde $x = c_2$; assim ambos $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.

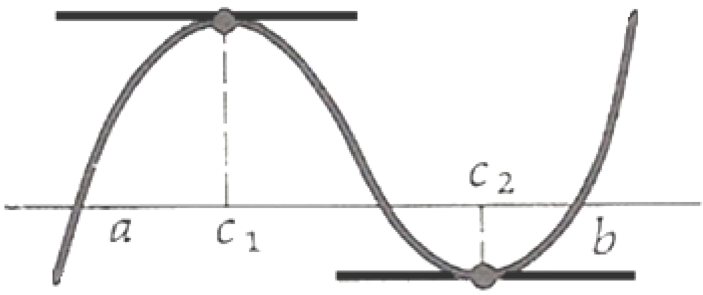


Figura 18

O inverso do Teorema de Rolle não é verdadeiro. Isto é não podemos concluir que se uma função f for tal que $f'(c) = 0$, como $(a < c < B)$, então serão verdadeiras as condições $(i), (ii)$e (iii).

EXEMPLO 11: Dada $f(x) = 4x^3 - 9x$. Comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeita em cada um dos seguintes intervalos: $\left[-\frac{3}{2}, 0\right], \left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Ache então um valor de c em cada um desses intervalos para os $f'(c) = 0$.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 12x^2 - 9$$

Como $f'(x)$ existe para todos os valores de x, f é derivável em $(-\infty, +\infty)$. Assim, as condições (i) e (ii) do teorema de Rolle são válidas em qualquer intervalo. Para determinar em quais intervalos a condição (iii) se verifica, encontramos os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Se $f(x) = 0$,

$$4x\,(x^2 - 9/4) = 0$$

$$x = -\frac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$$

Com $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 0$ o teorema de Rolle é válido em $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$. Analogamente, o teorema de Rolle é válido em $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ e $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Para encontrar os valores adequados de c, equacionamos $f'(x) = 0$, obtendo $12x^2 - 9 = 0$.

$$x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Portanto, no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$, uma escolha adequada para c é $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. No intervalo $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, tomamos $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enquanto no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ temos duas possibilidades para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Vamos aplicar agora o teorema de Rolle para provar o teorema do valor médio.

3.12 TEOREMA DO VALOR MÉDIO: Seja f uma função, tal que:

(i) seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;

(ii) seja derivável no intervalo aberto (a, b).

Então existirá um número c no intervalo aberto (a, b) tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Antes de demonstrar o teorema, vamos interpretá-lo geometricamente. Num esboço do gráfico da função $f'[f(b) - f(a)]/(b - a)$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. O teorema do valor médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B; isto é um número c em (a, b), tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Consulte a figura 19.

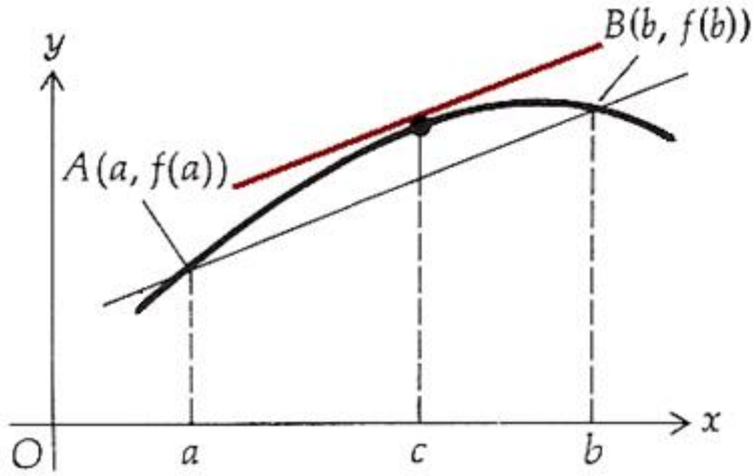


Figura 19

Se tomarmos o eixo x coincidente com a reta secante AB, podemos observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle, o qual será usado em sua demonstração.

DEMONSTRAÇÃO:

Uma equação da reta que passa por A e B na figura 19 é:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, $F(x)$ a medida da distância vertical entre o ponto $(x, f(x))$ do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante por A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

Vamos mostrar que a função F satisfaz as três condições da hipótese do teorema de Rolle.

A função F é continua no intervalo fechado $[a, b]$, pois é a soma de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condição (i) está satisfeita por F. A condição (ii) está satisfeita por F, pois f é derivável em (a, b). De (1), segue que $F(a) = 0$ e $F(b) = 0$. Portanto, também a condição (iii) do teorema de Rolle está satisfeita por F.

Da conclusão do teorema de Rolle, temos que existe c no intervalo aberto (a, b), tal que $F'(c) = 0$. Mas,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Logo, existe um número c em (a, b), tal que:

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como queríamos demonstrar. ■

EXEMPLO 12: $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$. Comprove que as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeita para $a = 1$ e $b = 3$. Então, encontre todos os números c no intervalo aberto $(1, 3)$ tais que:

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

SOLUÇÃO:

Como f é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de x. Logo, as hipóteses do teorema do valor médio estão satisfeita pata todo a e b.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \qquad \text{e} \qquad f(3) = -27$$

Logo,

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2} = -10$$

Equacionando $f'(c) = -10$, obtemos:

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$c = \frac{7}{3} \qquad c = 1$$

Como 1 não está no intervalo aberto $(1, 3)$, o único valor possível para c é $c = {}^{7}/_{3}$.

EXEMPLO 13: Supondo que $f(0) = -3$ e $f'(x) \leq 5$ para todos os valores de x. Quão grande $f(2)$ pode ser?

SOLUÇÃO:

Não foi dado que f é diferenciável (e, portanto, contínua) em toda parte. Em particular, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio ao intervalo $[0, 2]$. Existe então um número c tal que:

$$f'(2) - f(0) = f'(c)(2 - 0)$$

$$f(2) = f(0) + 2f'(c) = -3 + 2f'(c)$$

Logo,

Nos foi dado que $f'(x) \leq 5$ para todo x; assim sabemos que $f'(x) \leq 5$. Multiplicando por 2 ambos os lados dessa desigualdade, temos $2f'(c) \leq 10$, logo:

$$f(2) = -3 + 2\,f'(c) \leq -3 + 10 = 7$$

O maior valor possível para $f(2)$ é 7.

O teorema do Valor Médio pode ser usado para estabelecer alguns dos fatos básicos do cálculo diferencial. Um deles é o teorema a seguir. Os outros serão encontrados nas seções seguintes.

3.13 TEOREMA: Se $f'(x) = 0$ para todo x em um intervalo (a, b), então f é constante em (a, b).

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em (a, b), sendo $x_1 < x_{2.}$ Como f é diferenciável (a, b), ela deve ser diferenciável em (x_1, x_2) e contínua em $[x_1, x_2]$.

Aplicando o teorema do Valor Médio a f no intervalo $[x_1, x_2]$, obtemos um número c tal que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1, x_2)$$

Uma vez que $f'(x) = 0$ para todo x, temos $f'(c) = 0$, e a equação fica:

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \text{ ou } f(x_2) = f(x_1)$$

Portanto, f tem o mesmo valor em quaisquer dois números x_1 e x_2 em (a, b). Isso significa que f é constante em (a, b). ∎

COROLÁRIO: Se $f'(x) = g'(x)$ para todo x em um intervalo (a, b), então $f - g$ é constante em (a, b); isto é, $f(x) = g(x) + c$, onde c é uma constante.

DEMONSTRAÇÃO:

Seja $f(x) = f(x) - g(x)$, então:

$$f'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Para todo x em (a, b). Assim, pelo **Teorema (3.15)**, f é constante; isto é, $f – g$ é constante. ∎

NOTA: É necessário cuidado ao aplicar o **Teorema (3.13)**. Seja:

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O domínio de f é $D = \{x|\ x \neq 0\}$ e $f'(x) = 0$ para todo x em D. Mas obviamente f não é uma função constante. Isso não contradiz o **Teorema (3.15)**, pois D é um intervalo. Observe que f é constante no intervalo $(0, \infty)$ e também no intervalo $(-\infty, 0)$.

4 FUNÇÕES CRESCENTE E DECRESCENTE E O TESTE DA DERIVADA PRMEIRA.

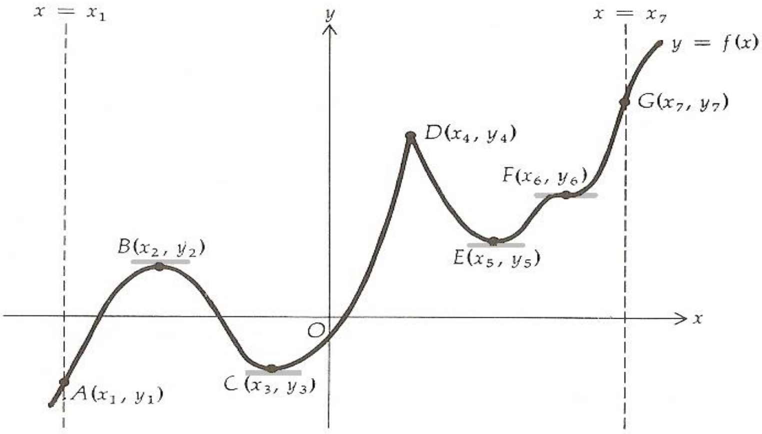


Figura 1

A Figura 1 representa um esboço do gráfico de uma função f para todo x no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Neste esboço, estamos supondo que f seja contínua em $[x_1, x_7]$. A figura mostra que quando um ponto se move ao longo da curva de A para B, os valores funcionais aumentam quando as abscissas aumentam, e que quando um ponto se move da curva de B para C, os valores funcionais decrescem, enquanto as abscissas crescem. Dizemos, então, que f é crescente no intervalo fechado $[x_1, x_2]$ e é decrescente no intervalo fechado $[x_2, x_3]$. Seguem as definições precisas de funções crescente e decrescente num intervalo.

4.1 DEFINIÇÃO: Uma função f definida num intervalo será *crescente* naquele intervalo, se e somente se:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

A função mostrada na Figura 1 é crescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_1, x_2]$; $[x_3, x_4]$; $[x_5, x_6]$; $[x_6, x_7]$; $[x_5, x_7]$.

4.2 DEFINIÇÃO: Uma função f definida num intervalo será *decrescente* naquele intervalo se e somente se:

$$f(x_1) > f(x_2) \text{ sempre que } x_1 < x_2$$

onde x_1 e x_2 são quaisquer números no intervalo.

A função representada na figura 1 é decrescente nos seguintes intervalos fechados: $[x_2, x_3]$; $[x_4, x_5]$.

Se uma função for crescente ou decrescente num dado intervalo, então dizemos que ela é *monótona* no intervalo.

Antes de enunciar um teorema que da um teste pra determinar se uma dada função é monótona num intervalo, vejamos o que está acontecendo geometricamente. Consulte a figura 1 e observe que quando a inclinação da reta tangente for positiva, a função será crescente e quando a inclinação da reta tangente for negativa, a função será decrescente. Como $f'(x)$ é a inclinação da reta tangente á curva $y = f(x)$, f é crescente quando $f'(x) > 0$ e decrescente quando $f'(x) < 0$. Também, como $f'(x)$ é a taxa de variação dos valores funcionais de $f(x)$ em relação a x, quando $f'(x) > 0$, os valores funcionais estão crescendo à medida que x cresce; e quando $f'(x) < 0$, os valores funcionais estão decrescendo à medida que x cresce.

4.3 TEOREMA: Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b):

(i) se $f'(x) > 0$ para todo x em (a, b), então f será crescente em $[a, b]$;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todo x em (a, b), então f será decrescente em $[a, b]$.

DEMONSTRAÇÃO DE $(\boldsymbol{i})$:

Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$, tais que $x_1 < x_2$. Então, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Do teorema do valor médio, segue que existe um número c em (x_1, x_2), tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Como $x_1 < x_2$, então $x_1 - x_2 > 0$. Também, por hipótese, $f'(c) > 0$. Logo $f(x_2) - f(x_1) > 0$, e assim $f(x_2) > f(x_1)$. Mostrando que $f(x_1) < f(x_2)$ sempre que $x_1 < x_2$, onde x_1 e x_2 são números quaisquer no intervalo $[a, b]$. Logo, pela **definição 4.1**, segue que f é crescente em $[a, b]$. A demonstração da parte (ii) é similar. ■

Uma aplicação do **Teorema 4.3** é a demonstração do que conhecemos como teste da derivada para extremos relativos de uma função.

4.4 TEOREMA - Teste da Derivada Primeira para Extremos Relativos: Seja f uma função contínua em todos os pontos do intervalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todo os pontos de (a, b), exceto possivelmente em c.

(i) se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo direito, e se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f'(x) < 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo direito, e se $f'(x) > 0$ para todos os valores de x em algum intervalo aberto tendo c como extremo esquerdo, então f terá um valor máximo relativo em c;

DEMONSTRAÇÃO DE (i):

Seja (d, c) (onde $d > a$) o intervalo tendo c como seu extremo direito, para qual $f'(x) > 0$ para todo x no intervalo. Segue, do **Teorema 4.3** (i), que f é crescente em [d, c]. Seja (c, e) (onde $e < b$) o intervalo tendo c como seu extremo esquerdo, para qual $f'(x) < 0$ para todo x no intervalo. Pelo **Teorema 4.3** (ii), f é decrescente em $[c, e]$. Como f é crescente em $[d, c]$, segue da **definição 4.1** que se x_1 está em $[d, c]$ e $x_1 \neq c$, então $f(x_1) < f(c)$. Também, como f é decrescente em $[c, e]$, segue da **definição 4.2** que se x, está em $[c, e]$ e $x_2 \neq c$, então $f(c) > f(x_2)$. Logo, da **definição 4.1**, f tem um valor máximo relativo em c. ■

O teste da derivada primeira para extremos relativos estabelece essencialmente que se f for contínua em c e $f'(x)$ mudar o sinal algébrico de positivo para negativo quando x cresce através de c, então f terá um valor máximo relativo em c, e se $f'(x)$ mudar o sinal de negativo para positivo enquanto x cresce através de c, então f terá um valor mínimo relativo em c.

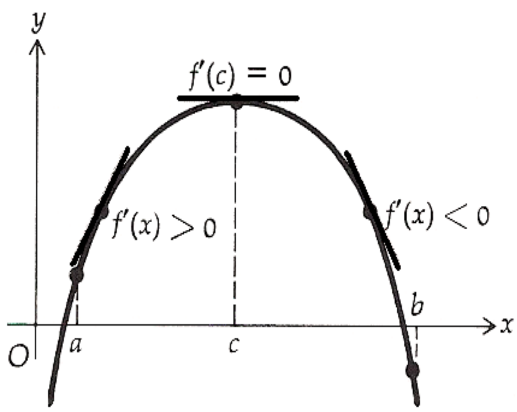


Figura 2

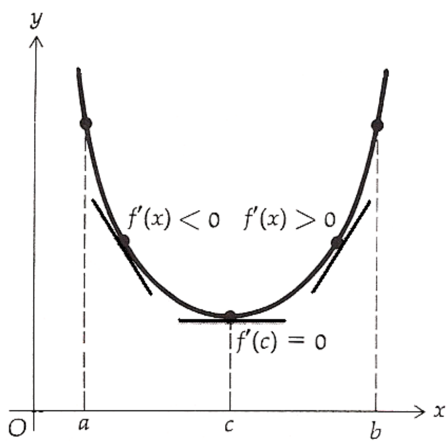


Figura 3

As figuras 2 e 3, acima, ilustram as partes (i) e (ii), respectivamente, do **Teorema 4.4**, quando $f'(c)$ existe.

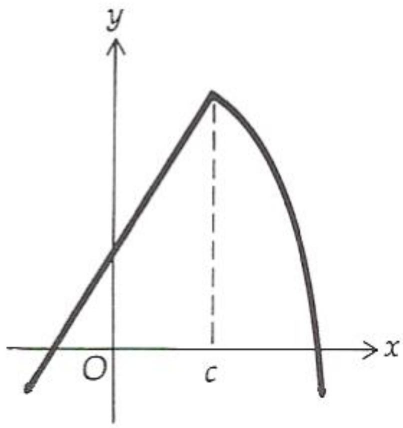


Figura 4

A figura 4 mostra o esboço do gráfico de uma função f que tem um valor máximo relativo num número c, mas $f'(c)$ não existe, contudo, $f'(x) > 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$.

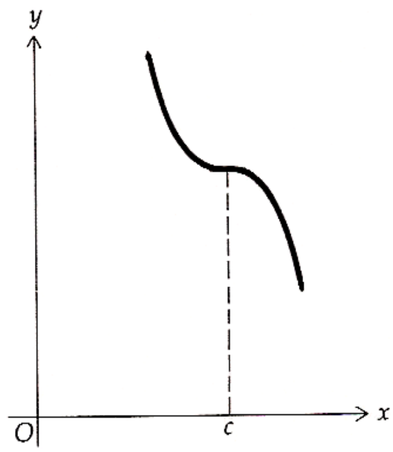


Figura 5

Na figura 5 há um esboço do gráfico de uma função f para a qual c é um número crítico e $f'(x) < 0$ quando $x < c$ e $f'(x) < 0$ quando $x > c$; f não tem um extremo relativo em c.

As demais ilustrações do **Teorema 4.4** aparecem na figura 1. Em x_2 e x_4 a função tem um valor máximo relativo e em x_3 e x_5, a função tem um valor mínimo relativo; mesmo que x_6 seja um número crítico para a função, não há extremo relativo em x_6.

Em suma, para determinar os extremos relativos de f:

1. Ache $f'(x)$
2. Ache os números críticos de f, isto é, os valores de x para os quais $f'(x) = 0$, ou para os quais $f'(x)$ não existe.
3. Aplique o teste da derivada primeira (**Teorema 4.4**)

Os exemplos a seguir ilustram esse procedimento.

EXEMPLO 1: Dada a função:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1,$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

SOLUÇÃO:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ existe para todo os valores de x. Equacione $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Assim, os números críticos de f são 1 e 3. Para determinar se f tem um extremo relativo nesses números, aplicamos o teste da derivada primeira. Vejamos os resultados na tabela abaixo.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 1$		$+$	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem uma valor máximo relativo
$1 < x < 3$		$-$	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem uma valor mínimo relativo
$3 < x$		$+$	f é crescente

Segundo a tabela, acima, 5 é um valor máximo relativo de f ocorrendo em $x = 1$, e 1 é um valor mínimo relativo de f, ocorrendo em $x = 3$, como mostra a figura abaixo.

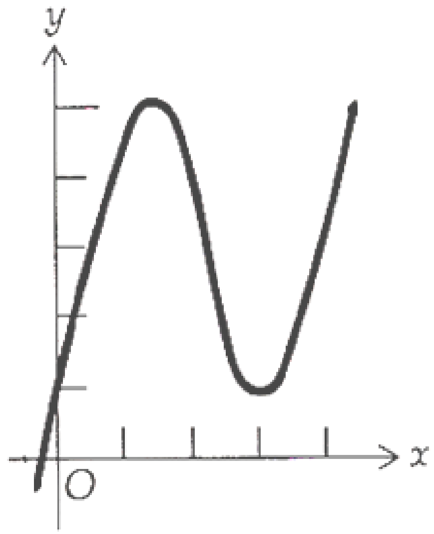


Figura 6

EXEMPLO 2: Dada

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & se\ x < 3 \\ 8 - x & se\ x \leq 3 \end{cases}$$

ache os extremos relativos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

SOLUÇÃO:

Se $x < 3$, $f'(x) = 2x$. Se $x > 3$, $f'(x) = -1$. Como $f'_{-}(3) = 6$ e $f'_{+}(3) = -1$, $f'(3)$ não existe. Logo, 3 é um número crítico de f.

Como $f'(x) = 0$ se $x = 0$, segue que 0 é um número crítico de f. Aplicando o teste da derivada primeira, resumimos os resultados na tabela abaixo.

	$f(x)$	$f'(x)$	Conclusão
$x < 0$		$-$	f é decrescente
$x = 0$	-4	0	f tem uma valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		$+$	f é crescente
$x = 3$	5	não existe	f tem uma valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f é decrescente

Vejamos a representação geométrica desses dados:

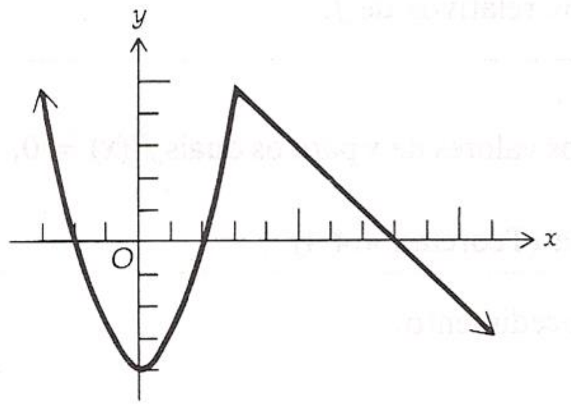


Figura 7

5 CONCAVIDADE E PONTOS DE INFLEXÃO

A figura 1 abaixo mostra um esboço do gráfico de uma função f cujas derivadas primeira e segunda existem no intervalo fechado $[x_1, x_7]$. Como ambas f e f' são diferenciáveis nele, f e f' são contínuas em $[x_1, x_7]$.

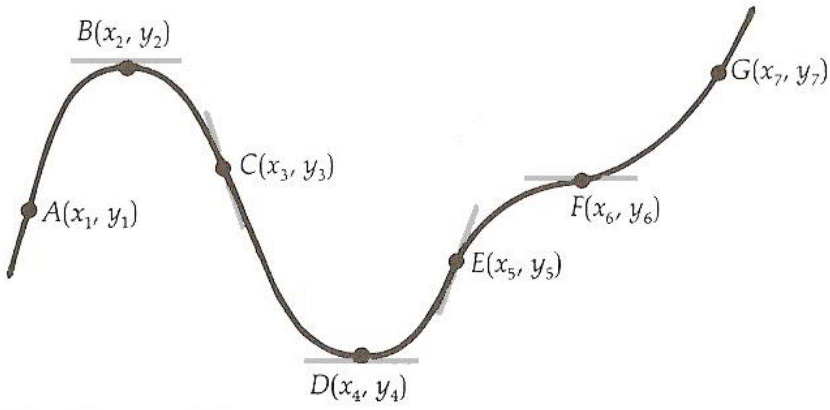


Figura 1

Se considerarmos um ponto movendo-se ao longo do gráfico da figura 1, de A para G, então a posição de P irá variar quando x crescer de x_1 até x_7. Quando P move-se ao longo do gráfico, de A para B, a inclinação da reta tangente ao gráfico é positiva e decrescente; isto é, a reta tangente está girando no sentido horário, e o gráfico está abaixo da reta tangente. Quando o ponto P está em B, a inclinação da reta tangente é zero e ainda é decrescente. Quando P move-se ao longo do gráfico, de B para C, a inclinação da reta tangente é negativa e ainda é decrescente, a reta tangente ainda está girando no sentido horário e o gráfico está abaixo da reta tangente. Dizemos que o gráfico é côncavo para baixo, de A até C. Quando P se move ao longo do gráfico, de C para D, a inclinação da reta tangente é negativa e crescente; isto é a reta tangente está girando no sentido anti-horário e o gráfico está acima de sua reta tangente. Em D, a inclinação da reta tangente é zero e ainda está crescente. De D para E, a inclinação da reta tangente é positiva e crescente; a reta tangente continua girando no sentido anti-horário, e o gráfico está acima de sua reta tangente. Dizemos que o gráfico é côncavo para cima de C até E. O gráfico côncavo para baixo passa a ser côncavo para cima no ponto C, qual é chamado de ponto de inflexão.

Logo, temos as seguintes definições:

5.1 DEFINIÇÃO: O gráfico de uma função f será côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq I$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará acima da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

5.2 DEFINIÇÃO: O gráfico de uma função f será côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ se $f'(c)$ existir e se houver um intervalo aberto I contendo c, tal que para todos os valores de $x \neq I$, o ponto $(x, f(x))$ do gráfico estará abaixo da reta tangente ao gráfico em $(c, f(c))$.

EXEMPLO 1: A figura 2 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para cima no ponto $(c, f(c))$ e a figura 3 mostra o esboço de parte do gráfico de uma função f que é côncava para baixo no ponto $(c, f(c))$.

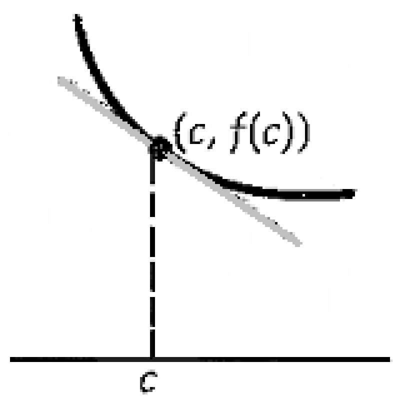


Figura 2

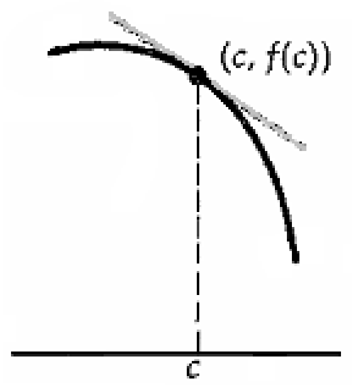


Figura 3

O gráfico da função f mostrado na figura 1 é côncavo para baixo em todos os pontos $(x, f(x))$ para os quais x está num dos seguintes intervalos abertos: (x_1, x_3) ou (x_5, x_6). Da mesma forma, para x num dos intervalos (x_3, x_5) ou (x_6, x_7), o gráfico da função f, na Figura 1, é côncavo para cima.

EXEMPLO 2: Se f for a função definida por $f(x) = x^{2,}$ então $f'(x) = 2x$ e $f''(\text{x}) = 2$. Assim, $f''(\text{x}) > 0$ para todo x. Como o gráfico de f, na Figura 4, está acima de suas retas tangentes, então ele é côncavo para cima, em todos os seus pontos.

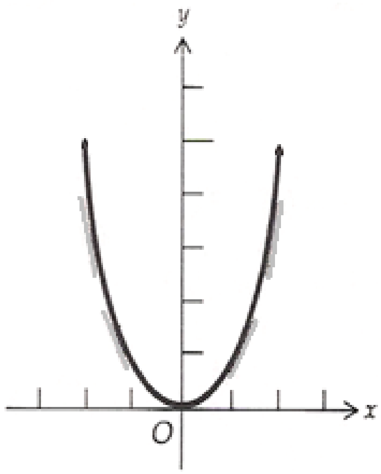


Figura 4

Se g for a função definida por $g(x) = -\, x^2$, então $g'(x) = -2x$ e $g''(x) = -2$. Logo, $g''(x) < 0$ para todo x. Também, o gráfico de g, na figura de 5, está abaixo de suas retas tangentes. Logo, o gráfico de g é côncavo para baixo em todos os seus pontos.

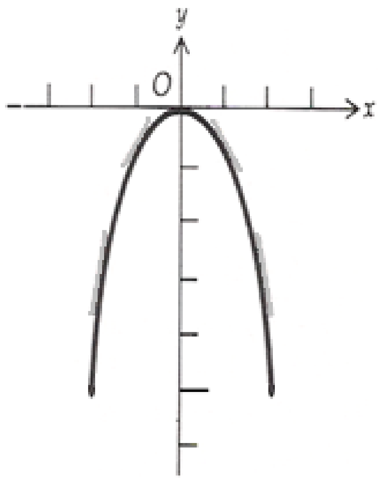


Figura 5

Comparando, observamos que, na figura 4 é tal que $f''(x) > 0$ para todo x, e o gráfico de f é côncavo para cima em toda parte, enquanto que para a função g da figura 5, $g''(x) < 0$ para todo x, e o gráfico de g é côncavo para baixo em toda parte. Essas duas situações são casos especiais do teorema a seguir.

5.3 TEOREMA: Seja f uma função diferenciável em algum intervalo aberto contendo c. Então:

(i) se f"(c) > 0, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f(c))$;

(ii) se f"(c) < 0, o gráfico de f é côncavo para baixo em $(c, f(c))$.

DEMONSTRAÇÃO DE (i):

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c}$$

Como $f''(c) > 0$,

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Então, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

para todo $x \neq c$ em I. $(\mathbf{1})$

Considere agora a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(x))$. Uma equação da reta tangente é

$$y = f\ (c) + f'(c)(x - c) \qquad (\mathbf{2})$$

Seja x um número no intervalo I tal que $x \neq c$, e seja Q o ponto do gráfico de f cuja abscissa é x. Através de Q traçamos uma reta paralela ao eixo y e seja T o ponto de intersecção dessa reta com a reta tangente.

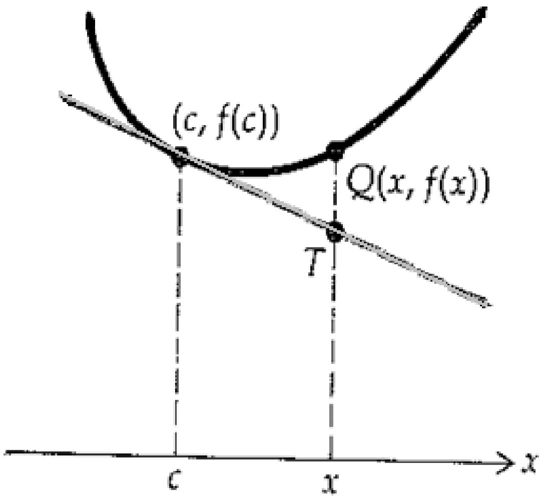


Figura 6

Para provar que o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f\ (c))$, precisamos mostrar que o ponto Q está acima do ponto T ou, equivalentemente, que a distância orientada $\overline{TQ} > 0$ para todos os valores de $x \neq c$ em I. $\overline{TQ}$ é igual à ordenada de Q menos a ordenada de T. A ordenada de Q é $f(x)$ e a de T é obtida de $(\mathbf{2})$; assim,

$$\overline{TQ} = f(x) - [f(c) + f'(c)(x - c)]$$

$$\overline{TQ} = [f(x) - f(c)] - f'(c)(x - c) \tag{3}$$

Do teorema do valor médio, existe algum número d entre x e c, tal que

$$f'(d) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Isto é,

$$f(x) - f(c) = f'(d)(x - c) \text{ para algum } d \text{ entre } x \text{ e } c$$

Substituindo essa igualdade em $(\mathbf{3})$, temos

$$\overline{TQ} = f'(d)(x - c) - f'(d)(x - c)$$

$$\overline{TQ} = (x - c)[f'(d) - f'(c)] \tag{4}$$

Como d está entre x e c, d está no intervalo I, e assim, tomando $x = d$ na desigualdade $(\mathbf{1})$, obtemos

$$\frac{f'(d) - f'(c)}{d - c} > 0 \tag{5}$$

Para provar que $\overline{TQ} > 0$, mostra-se que ambos os fatores à direita de $(\mathbf{4})$ tem o mesmo sinal. Se $x - c > 0$, então $x > c$. E como d está entre x e c, então $d > c$; logo, da desigualdade $(\mathbf{5})$**,** $f'(d) - f'(c) > 0$. Se $x - c < 0$, então $x < c$ e assim $d < c$; portanto, de $(\mathbf{5})$, $f'(d) - f'(c) < 0$. Concluímos que $x - c$ e $f'(d) - f'(c)$ tem o mesmo sinal; logo $\overline{TQ}$ é um número positivo. Assim, o gráfico de f é côncavo para cima em $(c, f\ (c))$. A prova para a parte (ii) é similar. ■

O inverso deste Teorema não é verdadeiro. Por exemplo, se for a função definida por $f(x) = x^4$ o gráfico de f será côncavo para cima no ponto (0,0), mas $f''(0) = 0$ pois $f''(x) = 12x^2$. Assim sendo, uma condição suficiente para que o gráfico de uma função f

seja côncavo para cima no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) > 0$, mas a condição não é necessária. Analogamente, uma condição suficiente – mas não necessária – para que o gráfico de uma função f seja côncavo para baixo no ponto $(c, f(c))$ é que $f''(c) < 0$.

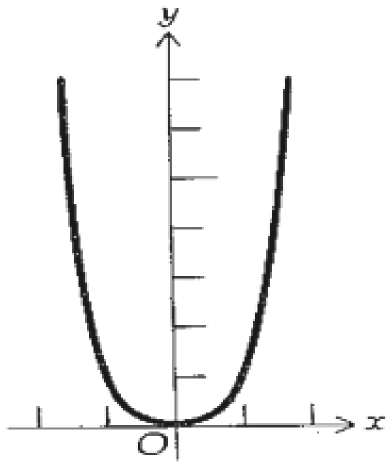


Figura 7

Se existe no gráfico de uma função um ponto no qual o sentido da concavidade muda, havendo aí uma reta tangente ao gráfico, então o gráfico da função cruzará sua reta tangente nesse ponto, conforme mostram as Figuras 8,9 e 10. Tal ponto é chamado ponto de inflexão.

Figura 8

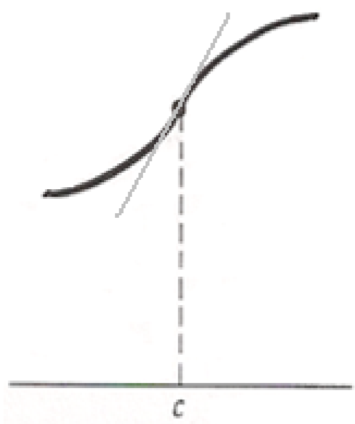


Figura 9

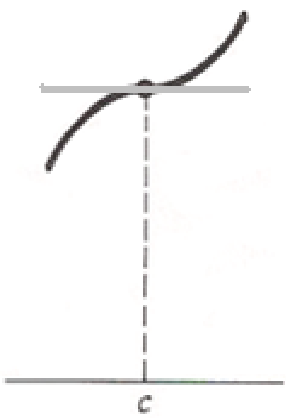


Figura 10

5.4 DEFINIÇÃO: O ponto $(c, f(c))$ será um *ponto de inflexão* do gráfico da função f se o gráfico tiver nele uma reta tangente e se existir um intervalo aberto I contendo c, tal que se x estiver em I, então

(i) $f''(x) < 0$ se $x < c$ e $f''(x) > 0$, ou

(ii) $f''(x) > 0$ se $x < 0$ e $f''(x) < 0$ se $x > c$.

A Figura 8 ilustra um ponto de inflexão onde se verifica a condição (i) da definição acima; neste caso, o gráfico é côncavo para baixo em pontos imediatamente à esquerda do ponto de inflexão e côncavo para cima em pontos imediatamente à sua direita. A condição (ii) está ilustrada na Figura 9, onde o sentido da concavidade muda de cima para baixo no ponto de inflexão. A Figura 10 é outra ilustração da condição (i), onde o sentido da concavidade muda de baixo para cima no ponto de inflexão. Nota-se que na Figura 10 há uma reta tangente horizontal no ponto de inflexão.

No gráfico da figura 1 há pontos de inflexão em C, E e F.

A **definição 5.4** não indica nada sobre o valor da derivada segunda de f num ponto de inflexão. O teorema a seguir estabelece que se a derivada segunda existir num ponto de inflexão, ela deverá ser zero nele.

5.5 TEOREMA: Se a função f for derivável em algum intervalo aberto contendo c e se (c, f(c)) for um ponto de inflexão do gráfico de f, então, se $f''(c)$ existe, $f''(c) = 0$

DEMONSTRAÇÃO:

Seja g a função tal que $g(x) = f'(x)$; então $g'(x) = f''(x)$. Como (c, f(c)) é um ponto de inflexão do gráfico de f, então $f''(x)$ muda de sinal em c e assim $g'(x)$ muda de sinal em c. Logo, pelo teste da derivada primeira (Teorema 4.4), g tem um extremo relativo em c, e c é um número crítico de g. Como $g'(c) = f''(c)$ e como por hipótese $f''(c)$ existe, segue que $g'(c)$ existe. Logo, $g'(c) = 0$ e $f''(x) = 0$. ■

O inverso deste teorema não é verdadeiro. Isto é, se a derivada segunda de uma função for nula num número c, o gráfico da função não terá, necessariamente, um ponto de inflexão em $x = c$. É o que mostra o exemplo a seguir.

EXEMPLO 18: Considere a função f definida por $f(x) = x^4$.

$$f'(x) = 4x^3 \qquad\qquad f''(x) = 12x^2$$

Observe que $f''(0) = 0$; mas, como $f''(x) > 0$ se $x < 0$, e $f''(x) > 0$ se $x > 0$, o gráfico é côncavo para cima em pontos imediatamente à esquerda e à direita de (0,0). Conseqüentemente, (0,0) não é um ponto de inflexão. Um esboço do gráfico de f é:

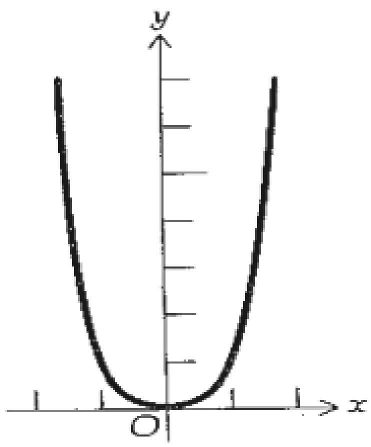


Figura 10

EXEMPLO 19: Seja a função f definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$. Ache o ponto de inflexão de f e determine onde o gráfico é côncavo para cima e onde é côncavo para baixo. Faça um esboço do gráfico e mostre um segmento da tangente no ponto de inflexão.

SOLUÇAO:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \qquad\qquad f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ existe para todos os valores de x; assim sendo, o único ponto de inflexão possível é onde$f''(x) = 0$, o que ocorre em $x = 2$. Para determinar se existe ou não ponto de inflexão em $x = 2$, precisa-se verificar se $f''(x)$ muda de sinal; ao mesmo tempo, determinar a concavidade do gráfico para os respectivos intervalos. Os resultados estão resumidos na seguinte tabela.

	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Conclusão
$x < 2$			$-$	o gráfico é côncavo para baixo
$x = 2$	3	-3	0	o gráfico tem ponto de inflexão
$2 < x$			$+$	o gráfico é côncavo para cima

Um esboço do gráfico mostrando um segmento da tangente encontra-se na figura abaixo.

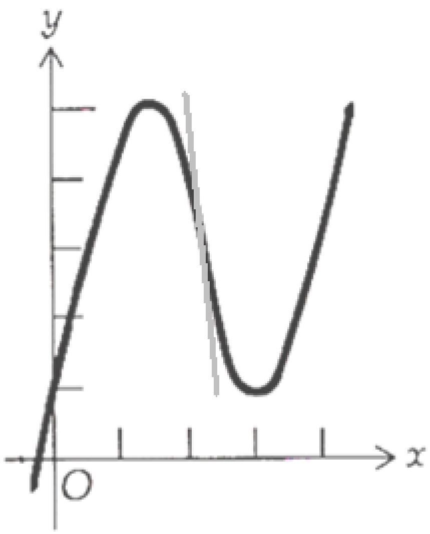


Figura 11

O gráfico mostra um segmento da tangente.

6 O TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Suponha que f seja uma função, tal que $f'e\ f''$ existam em algum intervalo aberto (a,b) contendo c e que $f'(c) = 0$. Suponha também, que f'' seja negativa em (a,b). Do **Teorema $\mathbf{4.3}$** (ii), como $f''(x) < 0$ em (a,b), então f' será decrescente em $[a,b]$. Como o valor de f' num ponto do gráfico de f dá a inclinação da reta tangente no ponto, segue que a inclinação da reta é decrescente em $[a,b]$, como mostra a Figura 12.

Figura 1

Do **Teorema $\mathbf{5.3}$** $(\boldsymbol{ii})$, o gráfico de f é côncavo para baixo em todos os pontos da figura, e um segmento da reta tangente aparece em alguns pontos. A inclinação da reta tangente é decrescente em $[a,b]$. E f tem um valor máximo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0$.

Suponha agora que f seja uma função com as mesmas propriedades da função citadas no primeiro parágrafo, por f'' ser positiva em (a,b). Então, do **Teorema $\mathbf{5.3}$** $(\boldsymbol{i})$, como $f''(x) > 0$ em (a,b), segue que f' é crescente em $[a,b]$. Assim, a inclinação da reta tangente é crescente em $[a,b]$, assim mostra a Figura 13.

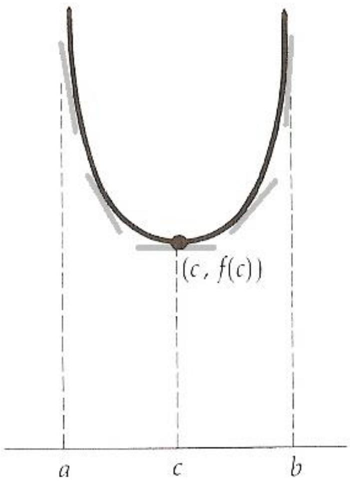


Figura 2

Do **Teorema $\mathbf{5.3}$ ($\boldsymbol{i}$)**, o gráfico de f é côncavo para cima em todos os pontos da figura, onde aparecem segmentos da reta tangente em alguns pontos. As inclinações dessas retas tangentes são crescentes em $[a, b]$, e a função f tem um valor mínimo relativo em c, onde $f'(c) = 0$ e $f(c) > 0$.

Vimos as deduções do Teste da derivada segunda para extremos relativos, que enunciaremos agora.

6.1 TEOREMA - Teste da derivada segunda para extremos relativos: Seja c um número crítico de uma função f, no qual $f'(c) = 0$ e suponha que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f''(c)$ existe e

(i) se $f''(c) < 0,$ então f tem um valor máximo relativo em c;

(ii) se $f''(c) > 0,$ então f tem um valor mínimo relativo em c.

DEMONSTRAÇÃO DE ($\boldsymbol{i}$):

Por hipótese, $f''(c)$ existe e é negativa. Assim

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

Logo, existe um intervalo aberto I contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0 \qquad (\mathbf{1})$$

Para todo $x \neq c$ no intervalo

Seja I_1 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x < c$; logo, c é o extremo direito de I_1. Seja I_2 o intervalo aberto contendo todos os valores de x em I para os quais $x > c$; assim, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto I_2.

Então, se x está em I_1, $x - c < 0$, e segue de $(\mathbf{1})$ que $f'(x) - f'(c) > 0$, ou equivalentemente, $f'(x) > f'(c)$. Se x está em I_2, $x - c > 0$ e segue de $(\mathbf{1})$ que $f'(x) - f'(c) < 0$, ou equivalentemente, $f'(x) < f'(c)$.

Mas como $f'(c) = 0$, concluímos que se x está em I_1, $f'(x) > 0$, e se x está em I_2, $f'(x) < 0$. Logo, $f'(x)$ muda o sinal algébrico de positivo para negativo, quando x cresce passando por c, e assim, pelo **Teorema 4.4**, f tem um valor máximo relativo em c.

7 PROCESSO GERAL PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Apresentamos agora o processo que deve ser seguido passo a passo, na aplicação a problemas de máximo e mínimo. É um processo eficiente não só para problemas geométricos, mas também para problemas físicos e econômicos.

Passo 1: Dedique-se ao problema com toda a determinação e logo verá que o problema não é tão difícil quanto parece. Comece com a leitura do problema cuidadosamente (várias vezes se necessário). E tenho certeza de que entenderá qual a variável a ser maximizada ou minimizada.

Passo 2: Associe um símbolo adequado à grandeza a ser maximizada ou minimizada e para a finalidade desta discussão, chame-o de Q. Determine as grandezas restantes em variáveis em função de Q e associe símbolos a essas variáveis. Se for possível esboce um diagrama e marque as várias pontes com os símbolos correspondentes.

Passo 3: Expresse a quantidade Q cujo valor extremo é desejado em função das fórmulas em que figurem as variáveis das quais ela depende. Se na fórmula figurarem outras variáveis, use as condições dada no enunciado do problema para achar relações entre essas variáveis que podem ser usadas para eliminar variáveis da fórmula.

Passo 4: Agora temos $Q = f(x)$, onde (para o propósito desta discussão) x denota a variável simples da qual Q foi considerada dependente, e f é a função determinada por esta dependência. Se houver restrições à quantidade x imposta pela natureza física do problema ou por outras considerações práticas, explique estas restrições explicitamente.

7.1 APLICAÇÕES EM GEOMETRIA

Vejamos algumas aplicações para as quais o Teorema do Valor Extremo não pode ser usado.

EXEMPLO 20: Uma caixa fechada com base quadrada deve ter um volume de 2.000 cm^3. O material da tampa e da base deve custar $R\$$ $3{,}00$ por centímetro quadrado e o material para os lados custa $R\$$ $1{,}50$ por centímetro quadrado. Queremos encontrar as dimensões da caixa cujo total do material seja mínimo.

SOLUÇÃO:

Seja x o comprimento de um lado da base quadrada e $C(x)$ o custo total do material. A área da base é x^2 cm^2. Seja y a profundidade da caixa. Como o volume da caixa é o produto da área da base pela profundidade.

$$x^2y = 2000$$

$$y = \frac{200}{x^2} \quad \textbf{(I)}$$

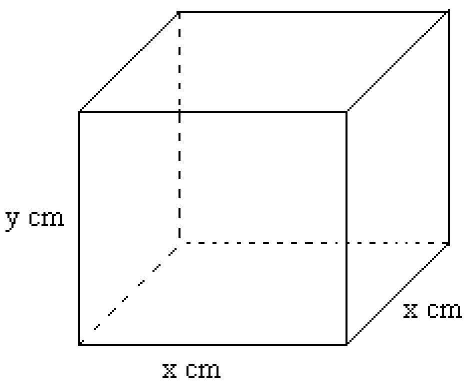


Figura 1

O número total de centímetros quadrados na área combinada da tampa e da base é $2x^2$ e para os lados, é $4xy$. Portanto, o número de centavos no custo total do material é:

$$3(2x^2) + \frac{3}{2}(4xy)$$

Substituindo y por seu equivalente de (**I**) temos:

$$C(x) = 6x^2 + 6x\left(\frac{200}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 6x^2 + \frac{12.000}{x}$$

O domínio de C é $(0, +\infty)$. Além disso, C é continua em seu domínio.

$$C'(x) = 12x - \frac{12.000}{x^2} \qquad C''(x) = 12 + \frac{24.000}{x^3}$$

Observe que $C'(x)$ não existe quando $x = 0$, mas 0 não está no domínio de C. Logo, os únicos números críticos serão aqueles obtidos como solução da equação $C'(x) = 0$,o que dá:

$$12x - \frac{12.000}{x^2} = 0$$

$$x^3 = 1.000$$

A única solução real é 10. Assim, 10 é o único número crítico. Para determinar se $x = 10$ torna C um mínimo relativo, aplicamos o teste da derivada segunda. Os resultados do teste da derivada segunda estão resumidos na tabela abaixo.

	$C'(x)$	$C''(x)$	Conclusão
$x = 10$	0	$+$	C tem um valor mínimo relativo

Como C é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de C em $(0, +\infty)$ é em $x = 10$. Assim, o custo do material será mínimo quando o lado da base quadrada for 10 cm. A profundidade será, então, de 20 cm, pois a área da base será 100 cm^2 e o volume, 2.000 cm^3.

EXEMPLO 21: Se uma lata fechada com volume 16π cm^3 deve ter a forma de um cilindro circular reto, ache a altura e o raio, se um mínimo de material deve ser usado em sua fabricação.

SOLUÇÃO:

Seja r cm o raio da base do cilindro, h cm a altura do cilindro e S cm^2 a área da superfície total do cilindro. A área da superfície lateral é $2\pi rh$ cm^2, a área da tampa é πr^2 cm^2 e a área da base é $\pi r2$ cm^2. Logo:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad \textbf{(II)}$$

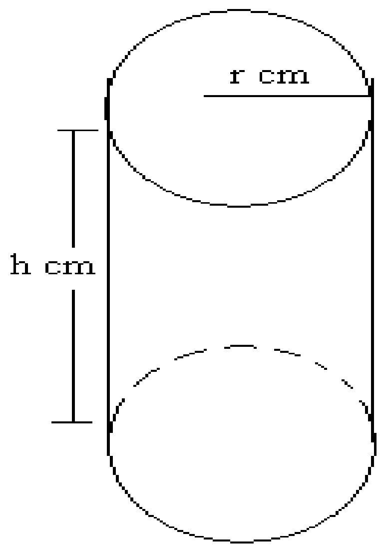


Figura 2

Se V cm^3 for o volume de um cilindro circular reto, então $V = \pi r^2 h$. Assim:

$$16\pi = \pi r^2 h \qquad \textbf{(III)}$$

Resolvendo (**III**) em h e substituindo em (**II**), obtemos S como uma função de r:

$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{16}{r^2}\right) + 2\pi r^2$$

$$S(r) = \left(\frac{32\pi}{r}\right) + 2\pi r^2$$

O domínio de S é $(0, +\infty)$, e S é continua em seu domínio.

$$S'^{(r)} = \frac{32\pi}{r} + 4\pi r \qquad\qquad S''(r) = \frac{64\pi}{r^3} + 4\pi$$

$S'(r)$ não existe quando $r = 0$, mas 0 não está no domínio de S. Os únicos números críticos serão aqueles obtidos ao resolvermos a equação $S'(r) = 0$, da qual temos:

$$4\pi r^3 = 32\pi \quad \Longrightarrow \quad r^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad r = 2.$$

O único número crítico de S é 2. Os resultados da aplicação do teste da derivada segunda estão resumidos na tabela.

	$S'(x)$	$S''(x)$	Conclusão
$r = 2$	0	$+$	S tem um valor mínimo relativo

Como S é contínua em seu domínio $(0, +\infty)$ e o único extremo relativo de S em $(0, +\infty)$ ocorre em $r = 2$. Quando $r = 2$, temos, de (5), $h = 4$. Logo, a menor quantidade de material será usada na fabricação da lata quando o raio for de 2 cm e a altura for de 4 cm.

Antes de abordarmos alguns outros problemas típicos de máximo e mínimo ligados à geometria, estabeleçamos um formulário para referência.

1. Área Plana

(a) Quadrado: $A = l^2, l =$ comprimento do lado.

(b) Retângulo: $A = lw, l =$ comprimento, $w =$ largura.

(c) Círculo: $A = \pi r^2, r =$ raio.

(d) Triângulo: $A = {}^1/_2\, bh, b =$ comprimento da base, $h =$ altura.

(e) Trapézio: $A = h\left(\frac{a+b}{2}\right)$, h = altura, a = comprimento de uma base. b = comprimento da outra base.

2. Perímetro

(a) Quadrado: $p = 4l$

(b) Retângulo: $p = 2l + 2w$

(c) Círculo: $p = 2\pi r$.

3. Arcas de Superfícies

(a) Caixa retangular fechada: $S = 2lw + 2lh + 2lh$, $l =$ comprimento, $w =$ largura, $h =$ altura.

(b) Cilindro circular reto (aberto na base e no topo): $S = 2\pi rh$, $r = raio$, h = altura.

(c) Esfera: $S = 4\pi r^2$ = raio.

(d) Cone circular reto com base aberta: $S = \pi rl$, h = altura, r = raio da base, $l =$ comprimento da geratriz $= \sqrt{r^2 + h^2}$.

4. Volume

(a) Caixa retangular: $V = lwh$.

(b) Cilindro circular reto: $V = \pi r^2 h$.

(c) Esfera: $V = {}^4/_3\ \pi r^3$.

(d) Cone circular reto: $V = {}^1/_3\ \pi r^2 h$.

EXMPLOS 22: Rodney tem 1.000 metros de grade com os quais ele pretende construir um cercado retangular para seu pequeno poodle francês. Quais as dimensões do cercado retangular de área máxima?

SOLUÇÃO:

A variável a ser maximizada é a área do cercado. Aqui, $A = lw$, onde l é o comprimento do cercado e ir é sua largura. Agora poderemos eliminar uma das duas variáveis l ou w da fórmula $A = lw$, já que podemos encontrar uma relação conveniente entre l e w. Mas existem 1000 metros avaliados de grade, comprimento do cercado é dado por $p = 2l + 2w$, daí teremos, $2l + 2w = 1000$. Resolvendo esta equação para l (ou w), obteremos $l = 500 - w$, que substituímos na equação $A = lw$ para obtermos:

$$A = (500 - w)w = 500w - w^2$$

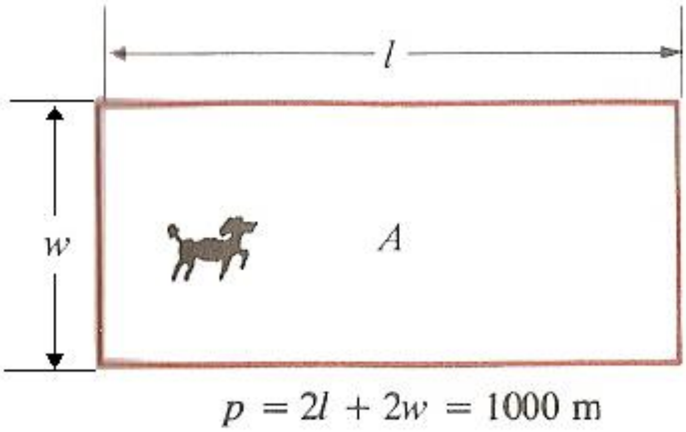


Figura 3

Assim teremos $A = f(w)$, onde $f(w) = 500w - w^2$. Visto que as dimensões w e l do cercado não podem ser negativas, temos $w \geq 0$ e $l = 500 - w \geq 0$; isto é, $0 \leq w \leq 500$. Nosso problema é encontrar o valor w que da o máximo de $f(w) = 500w - w^2$no intervalo fechado $[0,500]$. Aqui, $f(x) = 500 - 2w$, logo $w = 250$ dá o único ponto crítico no intervalo aberto $(0,500)$. Evidentemente. $f'(x) > 0$ para $w < 250$ e $f'(w) < 0$ para $w >$

250; logo, f é crescente em $[0,250]$ decrescente em $[250,500]$. Claramente, f atinge um valor máximo absoluto quando $w = 250$ metros e $l = 500 - w = 500 - 250 = 250$ metros. (Observe que a área é maior quando o cercado tem a forma quadrada.)

EXMPLO 23: Quadrados iguais são cortados de cada canto de um pedaço retangular papelão medindo 8 centímetros de largura por 15 centímetros de comprimento, e uma caixa sem tampa é construída virando os lados para cima. Determine o comprimento x dos lados dos quadrados que devem cortados para a produção de uma caixa de volume máximo.

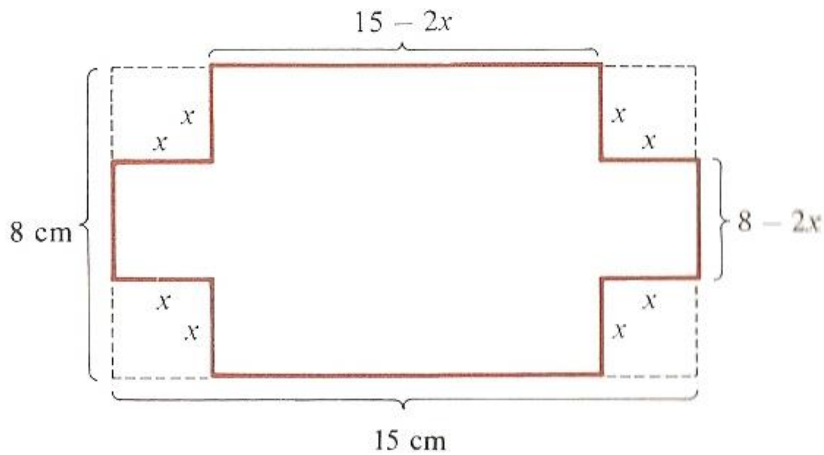


Figura 4

SOLUÇAO:

Denota-se o volume da caixa sem tampa por V. Da Fig. 2, vemos que altura da caixa é de x centímetros, a largura é $8 - 2x$ centímetros e o comprimento $15 - 2x$ centímetros. Desse modo,

$$V = x(8 - 2x)(15 - 2x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x, \qquad 0 < x < 4.$$

Seja f a função definida por:

$$f(x) = 4x^3 - 46x^2 + 120x,$$

daí

$$f'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = (x - 6)(12x - 20).$$

As soluções de $f'(x) = 0$ são $x = 5/3$ e $x = 6$; logo, f admite somente um ponto crítico, $5/3$, no intervalo $(0,4)$. Como f é contínua no intervalo fechado $[0,4]$ e $5/3$ é o único ponto crítico no intervalo aberto $(0,4)$, o máximo absoluto desejado para f é o maior dos valores $f(0) = 0$, $f(5/3) \approx 90{,}74$ e $f(4) = 0$. Portanto, o volume máximo (aproximadamente $90{,}74$ centímetros cúbicos) é obtido cortando quadrados cujos lados medem $5/3$ centímetros.

7.3 APLICAÇÕES EM FÍSICA.

Muitas leis da física – ou podem ser reformuladas para sustentar – que os movimentos ou transformações tomam lugar de tal modo que certas quantidades são maximizadas ou minimizadas.

EXEMPLO 24: James mora numa ilha a 6 km da praia e sua namorada Jean mora a 4 km praia acima. James pode remar seu barco a 3 km por hora e pode andar a 5 km por hora na praia. Encontre o tempo mínimo gasto por James para alcançar a casa de Jean vindo de sua ilha.

SOLUÇÃO:

Estabelece-se um sistema de coordenadas com a praia, reta, coincidindo com o eixo x e com a ilha de James no ponto $(0,6)$ no eixo y. Então a casa de Jean está localizada no ponto $(4,0)$ ao eixo x. Suponha que James reme seu barco de sua ilha ao ponto $(x, 0)$ na praia e então caminhe a pé de $(x, 0)$ até a casa de Jean. Raciocinando, levamos em conta as diferentes relações de tempo gasto para remar e andar, vemos que o tempo de percurso é dado por:

$$T = \frac{\sqrt{(0-6)^2 + (x-0)^2}}{3} + \frac{\sqrt{(4-x)^2 + (0-0)^2}}{5}$$

Isto é:

$$T = \frac{\sqrt{x^2+36}}{3} + \frac{4-x}{5} \qquad\qquad 0 \le x \le 4.$$

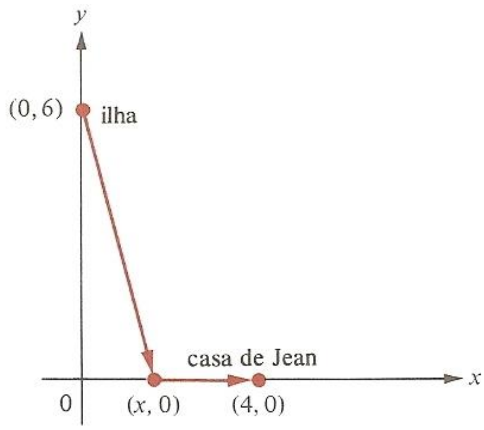


Figura 5

Desse modo, seja ƒ a função definida pela equação:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+36}}{3} + \frac{4-x}{5}, \quad \text{para } 0 \le x \le 4.$$

Precisamos encontrar o valor mínimo absoluto da função contínua ƒ no intervalo fechado [0,4]. Nesse caso, $f'(x) = {}^{1}/_{3}\, x(x^2+36)^{-\frac{1}{2}} - {}^{1}/_{5}$. Resolvendo a equação f'(x)=0 para pontos críticos, obtemos:

$$5x = 2(x^2+36)^{\frac{1}{2}}$$

$$25x^2 = 9(x^2+36)$$

$$x = \pm\frac{9}{2}$$

Precisamos rejeitar $x = -9/2$ porque ela é uma raiz estranha introduzida pela raiz quadrada e precisamos rejeitar $x = 9/2$ porque não pertence intervalo (0,4). Desse modo, a função ƒ não possui pontos crítico 5 intervalo (0,4). Enquanto $f(0) = 2{,}8$, $f(4) = 2\sqrt{13/3} \approx 2{,}4$, então ƒ assume um valor mínimo quando $x = 4$. Desse modo, para o menor tempo de percurso, James precisaria remar direto para casa de Jean. Isto requer $2/3\sqrt{13} \approx 2{,}4$ horas.

Vejamos alguns exemplos que mostram como os problemas de máximo e mínimo aparecem em conexão com situações físicas.

EXEMPLO 25: O navio A está 65 km a leste do navio B e está viajando para o sul a 15 km por hora, enquanto o navio B está indo para o leste a uma velocidade de 10 km por hora. Se os navios continuam seus cursos respectivos, determine a menor distância entre eles e quando isto irá ocorrer.

SOLUÇÃO:

Observe a ilustração.

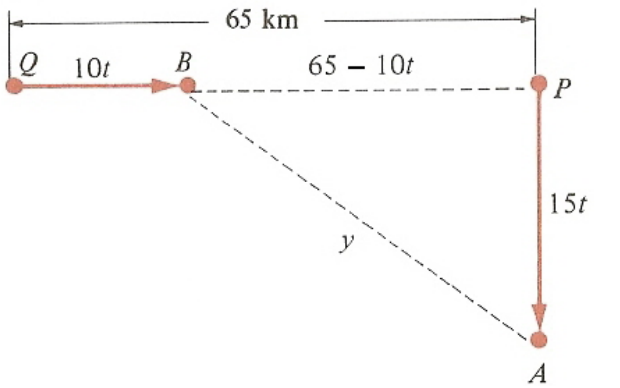


Figura 6

P mostra a posição original do navio A enquanto Q mostra a posição original do navio B. Depois de t horas B terá se movido $10t$ km, enquanto que A terá se movido $15t$ km. Pelo teorema de Pitágoras, a distancia y entre A e B no tempo t é dada por:

$$y = \sqrt{(15t)^2 + (65 - 10t)^2} = \sqrt{325^2 - 1300t - 4225.}$$

Claramente, y é mínima quando a expressão:

$$325t^2 - 1300 + 4225 = 325(t^2 - 4t + 13)$$

7.4 APLICAÇÕES EM COMÉRCIO E ECONOMIA

Em economia, o termo “marginal” é frequentemente usado como um sinônimo virtual para “derivada de”. Por exemplo, se C é a função custo tal que $C(x)$ é o custo da produção de x unidades de certa mercadoria, $C'(x)$ é a chamado de custo marginal da produção de x unidade de C' é chamada de função custo marginal. Desse modo, o custo marginal é a taxa de variação do custo da produção por variação da produção por unidade.

Em situações praticas x o numero de unidades produzidas, é usualmente um número um tanto grande. Portanto, em comparação a x, o número 1 pode ser considerado muito pequeno, de modo que:

$$C'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x + \Delta x) - C(x)}{\Delta x} \approx \frac{C(x + 1) - C(x)}{1} = C(x + 1) - C(x)$$

Por conseguinte, quando o número de unidades x é um pouco grande, o custo marginal $C'(x)$ pode ser observado com uma boa aproximação do custo $C(x + 1) - C(x)$ da produção de uma unidade a mais.

EXEMPLO: A Solar Brush Co. acha que o custo da produção total para manufaturação de x escovas de dentes é dado por $C(x) = R\$(500 + 30\sqrt{x})$. Se 5000 escovas dentes são manufaturadas, ache o custo exato da manufaturação de mais uma escova de dente e compare isto com o custo marginal.

SOLUÇÃO:

O custo exato da fabricação de mais uma escova de dente seria:

$$C(5001) - C(5000) = \left(500 + 30\sqrt{5001}\right) - \left(500 + 30\sqrt{5000}\right)$$

$$= 30(\sqrt{5001}) - (\sqrt{5000}) \approx R\$\, 0{,}21212$$

Como $C'(x) = 30/(2\sqrt{x}) = 15/\sqrt{x}$, então $C'(5000) = 15/\sqrt{5000} \approx R\$\, 0{,}21213$. Desse modo, o erro cometido no uso do custo marginal para estimar o verdadeiro custo da fabricação de mais uma escova de dente é menor que $R\$\ 0{,}00002$.

Se $T(x)$ denota o rendimento obtido quando x unidades de uma mercadoria são demandadas, então o rendimento marginal $T'(x)$ denota a taxa variação do rendimento por variação da demanda. Novamente para grandes valores de x o rendimento marginal $T'(r)$ é uma boa aproximação dor mento adicional $T(x+1)–T(x)$ gerado por uma unidade adicional da demanda.

Suponha que o rendimento total atinge um valor máximo quando x unidades são demandadas. Então o rendimento marginal $T'(x)$ precisa ser zero. De acordo com a interpretação de rendimento marginal situada acima, isto significa que quando o rendimento máximo fosse gerado por x unidades de demanda, praticamente não seria gerado rendimento adicional por mais uma unidade da demanda.

EXEMPLO 26: O rendimento total para um certo tipo de relógio suíço é dado pela equação $T(x) = 2000x\sqrt{75-x}, \quad 0 \leq x \leq 75$ onde x denota a demanda em milhares de relógios e o rendimento total é dado em reais. Determine o rendimento máximo.

SOLUÇÃO:

O rendimento marginal é dado por:

$$T(x) = 2000\sqrt{75-x} - \frac{1000x}{\sqrt{75-x}}$$

Fazendo $T'(x)$ igual a zero e resolvendo para valores críticos, obtemos x=50. Como T é contínua no intervalo fechado $[0{,}75]$ e como $T(0) = 0$, $T(50) = 500.000$, $T(75) = 0$, vemos que $x = 50$ corresponde ao rendimento máximo $R\$\, 500.000{,}00$. É interessante notar que o rendimento adicional gerado pela demanda para mais 1000 relógios (isto é, por mais uma unidade da demanda) é – $R\$\ 304{,}09$.

EXEMPLO 27: Uma agência locadora de automóveis aluga carros a membros da União de Crédito dos Professores e dá um desconto a esses membros de 2 por cento para cada carro no excesso de 12. Para quantos carros alugados aos membros o recebimento da agência seria máximo?

SOLUÇÃO:

O recebimento total da agência é dado por:

$$T(x) = \begin{cases} ax & \text{se } 0 < x < 12 \\ ax - [0{,}02(x-12)]ax & \text{se } 12 < x. \end{cases}$$

onde x é o número de carros alugados aos membros e $R\$a$ é a renda não descontada por carro. Temos:

$$T'(x) = \begin{cases} a & \text{se } 0 < x < 12 \\ 1{,}24a - 0{,}04ax & \text{se } 12 < x. \end{cases}$$

Portanto, a função T tem valores críticos em 12 e 31. Visto que $T'(x) > 0$ para $0 < x < 12$ e também para $12 < x < 31$, T é crescente em $[0{,}12]$ bem como em $[12{,}31]$; logo, T é crescente em $[0{,}31]$. Mas $T'(x) < 0$ para $x > 31$, logo T é decrescente em $[31, \infty)$. Daí, o valor crítico $x = 31$ fornece o máximo desejado.

EXEMPLO 28: Uma firma que fabrica saias para mulheres estima que o custo total $R(x)$ em reais por fabricar x saias é dado pela equação:

$$R(x) = 100 + 3x + \frac{x^2}{30}$$

Numa semana o rendimento total $T(x)$ em reais é dado pela equação $T(x) = 25x\ +\ x2/250$, onde x é o número de saias vendidas.

(a) Considerando que o número x de saias vendidas numa semana seja o mesmo número de saias fabricadas, escreva uma equação para o lucro semanal $P(x)$.

(b) Calcule o lucro máximo semanal.

SOLUÇÃO:

(a)

$$P(x) = T(x) - R(x) = \left(25 + \frac{x^2}{250}\right) - \left(100 + 3x + \frac{x^2}{30}\right) = 22 - \frac{22}{750}x^2 - 100$$

(b)

$$P'(x) = 22 - \frac{44}{750}x,$$

portanto $x = 375$ e o único valor critico. Como $P''(x) = \frac{44}{750} < 0$, então $x = 375$ assegura um lucro máximo de $R\$\ 4025{,}00$ por semana.

UNIDADE II

1 FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Muitas funções dependem de mais de uma variável independente. A maioria das relações que ocorrem na física, na economia e, de modo geral, na natureza é traduzida por funções de várias variáveis reais, a exemplo disso temos o cálculo de área e do volume, o que nos dá um motivo de estudo detalhado dessas funções, em particular das funções de duas variáveis.

As funções de várias variáveis aparecem com mais frequência em ciência que funções de uma única variável, a diferença é que seu cálculo é mais extenso. Suas derivadas são mais variadas em virtude das diferentes maneiras como interagem. Os estudos de probabilidade, estatística, dinâmica dos fluídos e eletricidade, são exemplos de áreas que lidam naturalmente com funções de mais de uma variável.

É importante saber como essas variáveis se relacionam e para isso é necessário introduzir uma nomenclatura adequada para descrever tais situações.

Ressaltamos que as regras do Cálculo permanecem essencialmente as mesmas quando trabalhamos em dimensões maiores e assim como é possível generalizar os conceitos para funções de duas variáveis o mesmo pode ser feito para funções de n variáveis.

1.1 FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

O cálculo de funções de duas variáveis nada mais é do que o cálculo de uma variável aplicado a duas variáveis independentes.

Observamos que $y = \mathbb{R}^2$, são funções cujo domínio é $\mathbb{R}^2$, ou seja, as variáveis independentes são do tipo (x, y) e o valor da função é um número real.

Ao comprar uma quantidade de café, por exemplo, o preço a pagar depende de quantos quilos se compra (x) e do preço por quilo (y). Então a função dada é

Preço = $x \cdot y$

1.1.1 DEFINIÇÃO: Uma função f de duas variáveis, x e y, é uma regra que associa um único número real $f(x, y)$ a cada ponto (x, y) de algum conjunto D no plano xy.

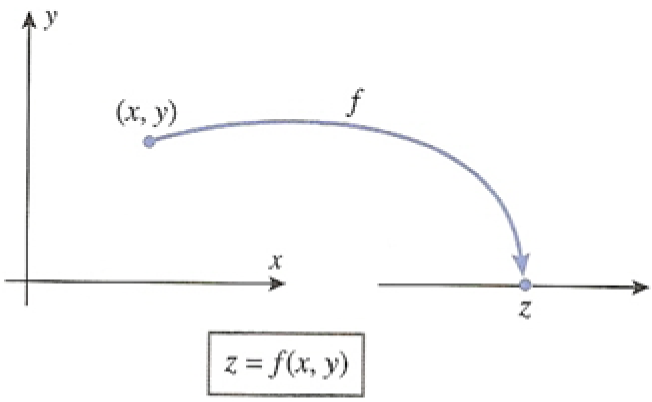


Figura 1

EXEMPLO 01: Seja $f(x, y) = 3x + 2y$ uma função cujo domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$. Determine

(a) $f(1, -1)$

(b) $f(a, x)$

(c) $f(a + b, a - b)$

SOLUÇÃO:

(a) $f(1, -1) = 3(1) + 2(-1) = 3 - 2 = 1$

(b) $f(a,x) = 3a + 2x$

(c) $f(a+b, a-b) = 3(a+b) + 2(a-b) = 3a + 3b + 2a - 2b = 5a + b$.

EXEMPLO 02: Uma loja vende apenas dois produtos, o primeiro a $R\$\,500{,}00$ reais a unidade e o segundo a $R\$\,600{,}00$ reais a unidade. Sejam x e y as quantidades vendidas dos dois produtos.

(a) Qual a expressão da receita de vendas?

(b) Quais os valores da receita se forem vendidas 10 unidades do primeiro produto e 15 unidades do segundo?

(c) Represente graficamente os pontos (x, y) para os quais a receita é $R\$\,300.000$.

SOLUÇÃO:

(a) Estamos lidando com uma função de duas variáveis, portanto: $f(x,y) = 500x + 600y$, sendo $f(x,y)$ o valor da receita.

(b) Agora que já temos a expressão da receita podemos calcular o valor que a loja recebe quando vendidas 10 unidades do primeiro produto e 15 do segundo.

Para $x = 10$ e $y = 15$, temos $f(x,y) = 500(10) + 600(15) \Longrightarrow f(x,y) = 14.000$.

$\therefore$ A loja receberá $R\$\,14.000$ reais pelas 25 unidades vendidas.

(c) Temos que

$$500x + 600y = 300.000$$

Quando $x = 0 \Longrightarrow y = 500$ e quando $y = 0 \Longrightarrow x = 600$. Portanto o ponto em que a receita assume valor de $R\$\,300.000$ é $(600{,}500)$.

Graficamente:

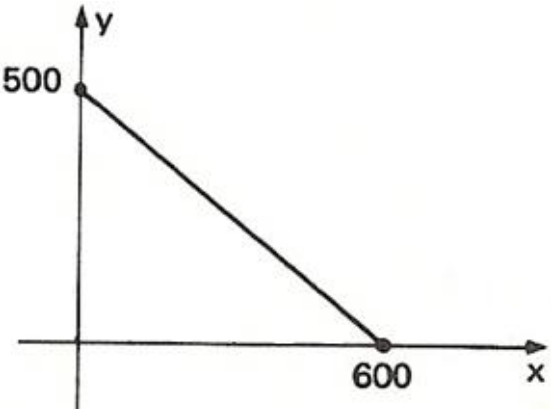


Figura 2

OBSERVAÇÃO: Quando não for especificado o domínio de uma função convenciona-se que o mesmo é o mais amplo subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) \in \mathbb{R}$.

EXEMPLO 03: Para a função $f(x,y) = \sqrt{y - x}$, convenciona-se que o domínio é o conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y - x \geq 0\}$.

EXEMPLO 04: Seja f a função de duas variáveis reais dada por $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. Determine o domínio de f.

SOLUÇÃO:

O domínio de f é o conjunto de todos os pares (x, y) de números reais, com $x \neq y$, isto é: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$. Esta função transforma o par (x, y) no número real $\frac{x+y}{x-y}$.

1.2 GRÁFICOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. O conjunto formado por todas as triplas ordenadas de reais é chamado de espaço tridimensional e é indicado por $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ou simplesmente $\mathbb{R}^3$.

$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) |\ a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Sendo f uma função de duas variáveis, definimos o gráfico de $f(x, y)$ no esboço xyz como sendo o gráfico da equação $z = f(x, y)$ e tal gráfico será uma superfície no espaço tridimensional, ou seja, o gráfico de f é o conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = f(x, y)$ e $(x, y) \in D\}$.

Se estivermos interessados em localizar um ponto no espaço, além da abscissa e da ordenada, necessitaremos de uma cota que irá exprimir a altura em que se encontra o ponto com relação ao plano. Convencionamos que o ponto será então designado por (x_1, x_2, x_3).

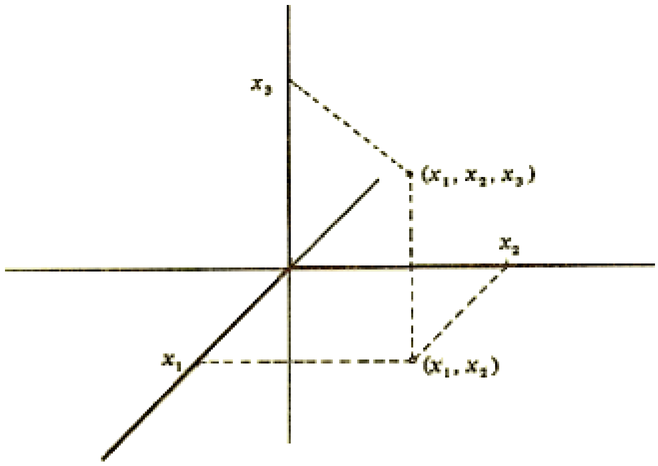


Figura 3

Isto é, representação gráfica de uma função de mais de uma variável se faz representando o valor da função num eixo adicional. Assim, uma função de duas variáveis terá um gráfico no espaço de dimensão 3, com os valores da função representados num terceiro eixo.

Se pensarmos num espaço de n dimensões, um ponto será designado por n coordenadas: $(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, onde n é a dimensão do espaço.

Podemos trabalhar em espaços de várias dimensões, mas uma representação geométria se torna praticamente impossível para dimensões superiores a 3.

1.3 EQUAÇÃO DO PLANO EM $\mathbb{R}^3$

Pode-se provar que toda relação do $\mathbb{R}^3$ que satisfaz uma equação do tipo $ax + by + cz + d = 0$ (com a, b, c, d reais e a, b, c não nulos simultâneamente) tem por representação geométrica um plano no espaço. O gráfico de tal pode ser obtido através de três pontos não alinhados.

Vamos, por exemplo, obter o gráfico do plano de equação $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Cada ponto do plano pode ser obtido atribuindo-se valores a duas incógnitas e calculando-se o valor da outra pela equação.

Temos, então:

(a) Para $x = 0$ e $y = 0$, teremos $z - 6 = 0$, ou seja, $z = 6$.

O ponto obtido é (0,0,6).

(b) Para $x = 0$ e $z = 0$, teremos $3y - 6 = 0$, ou seja, $y = 2$.

O ponto obtido é (0,2,0).

(c) Para $y = 0$ e $z = 0$, teremos $2x - 6 = 0$, ou seja, $x = 3$.

O ponto obtido é (3,0,0).

Portanto o plano procurado é o que passa pelos pontos $(0,0,6)$, $(0,2,0)$ e $(3,0,0)$.

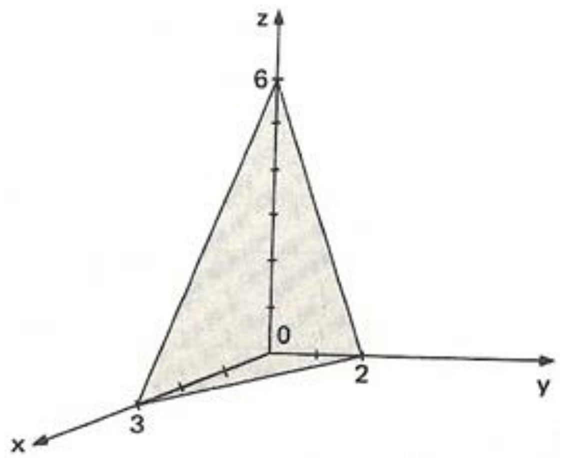


Figura 4

EXEMPLO 05: $f(x,y) = 4$ (função constante), $D = \mathbb{R}^2$

Como $z = 4 \quad \forall\, (x,y)$, o gráfico será um plano paralelo ao plano $x0y$, distante 4 unidades do mesmo.

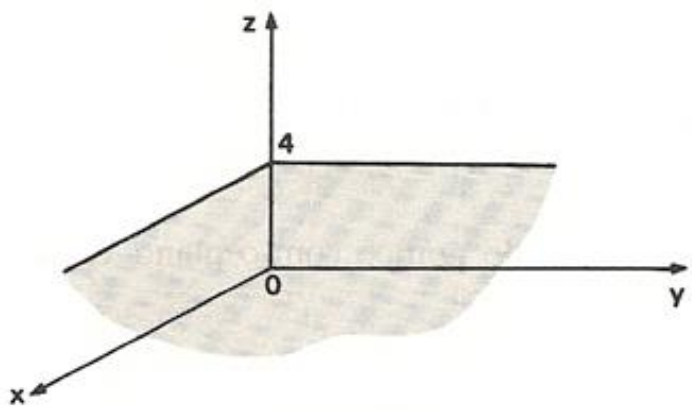


Figura 5

EXEMPLO 06: Descreva o gráfico da função $f(x,y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$ num sistema de coordenadas xyz .

SOLUÇÃO:

O gráfico da relação $z = 1 - x - \frac{1}{2}y$ representa um plano. Uma parte triângular do plano pode ser esboçada plotando as interseções com os eixos coordenados e unindo-os com segmentos de reta. Tomemos três pontos desse plano:

(a) $z = y = 0 \implies x = 1,$ temos o ponto (1,0,0)

(b) $x = z = 0 \implies y = 2$ temos o ponto (0,2,0)

(c) $x = y = 0 \implies z = 1$ temos o ponto (0,0,1)

Portanto, o gráfico de f é o plano

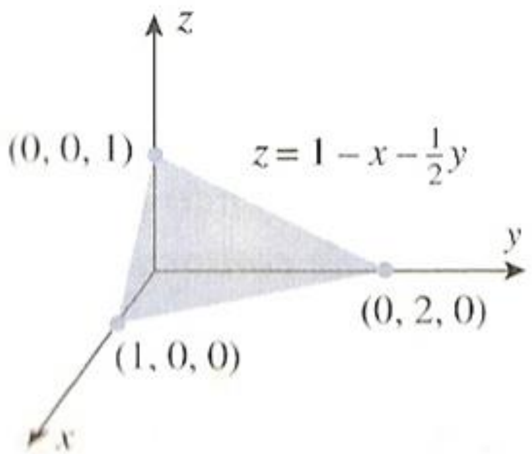


Figura 6

EXEMPLO 07: Descreva o gráfico da função $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Por definição, o gráfico da função dada é o gráfico da equação

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Depois de elevar ao quadrado ambos os lados, isso pode ser reescrito como

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

que representa uma esfera de raio 1, centrada na origem. Uma vez que a equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

impõe a condição adicional $z \geq 0$, o gráfico é somente uma semi-esfera superior

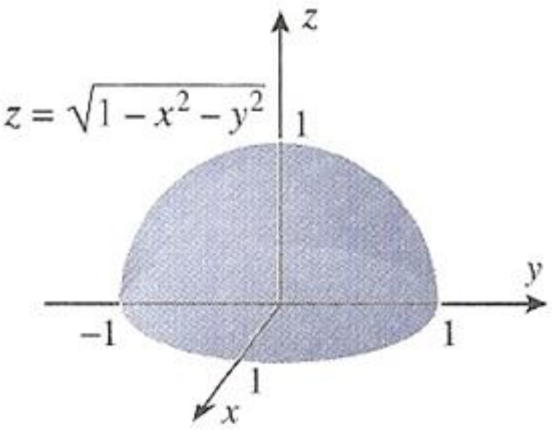


Figura 7

Em geral a obtenção do gráfico de f só é um problema simples em algumas situações particulares, por este motivo costuma-se usar uma forma alternativa de representação chamada de *método das curvas de nível*.

1.4 CURVAS DE NÍVEL

Devido a dificuldade de desenhar um gráfico de uma função de duas variáveis, costuma-se usar a seguinte forma alternativa de representação: obtem-se o conjunto dos pontos do domínio que tem a mesma cota c. Tais pontos, em geral, formam uma curva que recebe o nome de *curva de nível* c *da função*.

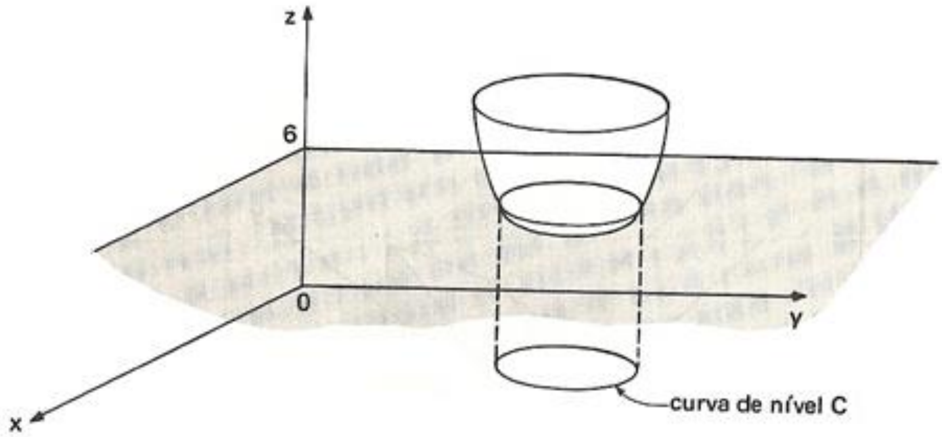


Figura 8

Assim sendo, atribuindo valores a c, obtemos várias curvas de nível, que permitem tirar importantes informações sobre a função.

1.4.1 DEFINIÇÃO: Se uma superfície $z = f(x, y)$ for cortada pelo plano horizontal $z = k$, então todos os pontos da interseção têm $f(x, y) = k$. A projeção desta interseção sobre o plano xy e denominada curva de nível k. Um conjunto de curvas de nível para $z = f(x, y)$ é chamado de mapas de contornos de f.

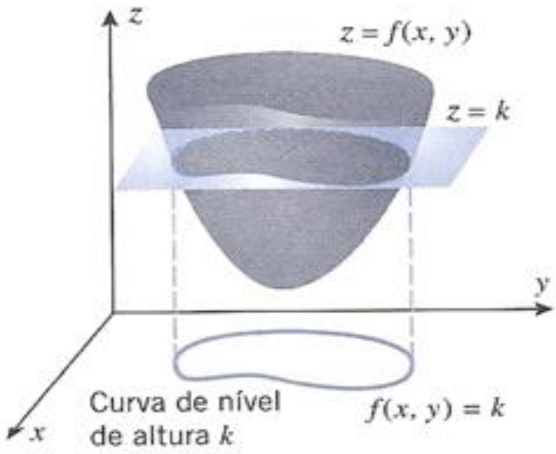


Figura 9

Duas maneiras de visualizar os valores de uma função $f(x, y)$ é ao desenhar e identificar curvas no domínio nas quais f tem um valor constante ou esboçar a superfície $z = f(x, y)$.

Os mapas topográficos ou de contornos, representam paisagens tridimensionais, como montanhas, através de linhas de contorno bidimensional ou curvas de elevação constante.

Vejamos um modelo de colina e seu mapa de contornos:

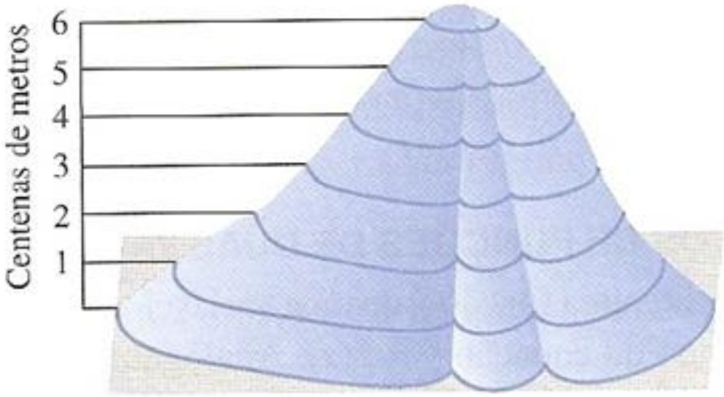


Figura 10: Colina modelo com dois sulcos.

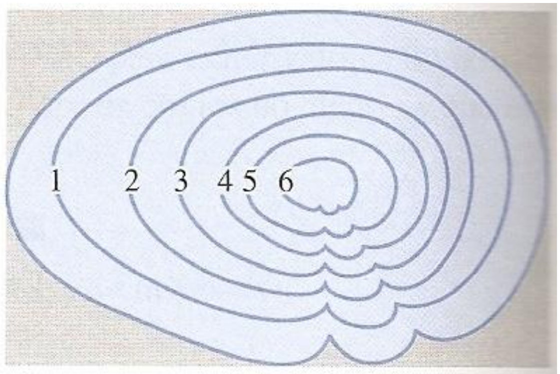


Figura 11: Mapa de contornos da colina modelo.

O mapa de contornos foi construído passando planos de elevação constante pela colina, projetando o contorno resultante sobre uma superfície plana e classificando os contornos por sua elevação. Os dois sulcos aparecem como reentrâncias das linhas de contornos e as curvas são mais próximas no mapa de contornos quando a colina tem uma inclinação íngreme e tornam-se mais espaçadas quando a inclinação é gradual.

EXEMPLO 08: Seja a função $f(x, y) = x^2 + y^2$. As curvas de nível 1,2 e 4 são:

$$c = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$c = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$$

$$c = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

ou seja, são circunferências de centro $(0,0)$ e de raios $1, \sqrt{2}$ e 2 respectivamente.

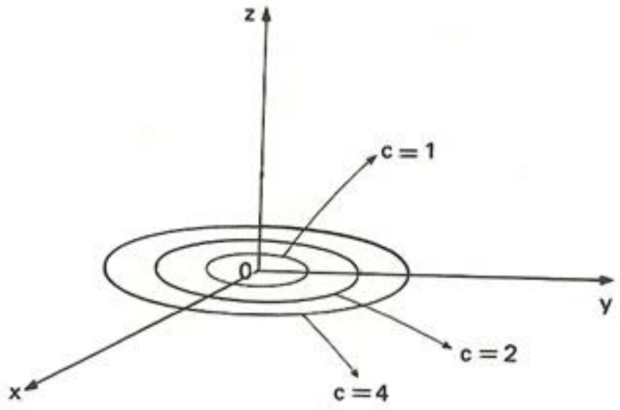


Figura 12

Frequentemente, a representação das curvas de nível é feita desenhando-se apenas os eixos $0x$ e $0y$.

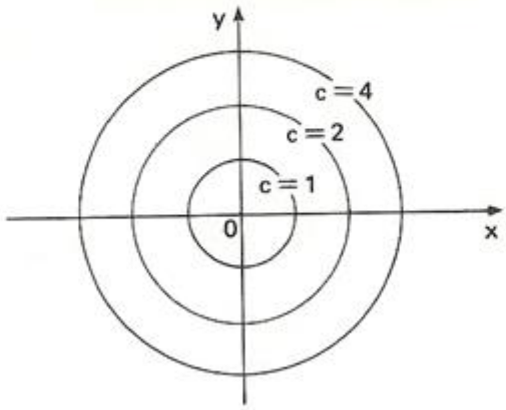


Figura 13

EXEMPLO 09: Esboce o mapa de contornos de $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ usando as curvas de nível de altura $k = 0,1,2,3,4,5$.

SOLUÇÃO:

O gráfico da superfície $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ é um parabolóide. Logo o mapa de contorno é uma família de elipses centradas na origem. A curva de nível de altura k tem a equação $4x^2 + y^2 = k$. Se $k = 0$, então o gráfico é o único ponto $(0,0)$. Para $k > 0$, podemos reescrever a equação como:

$$\frac{x^2}{4/_k} + \frac{y^2}{k} = 1$$

que representa uma família de elipses com cortes no eixo x iguais a $\pm\sqrt{k/_2}$ e cortes no eixo y iguais a $\pm\sqrt{k}$.

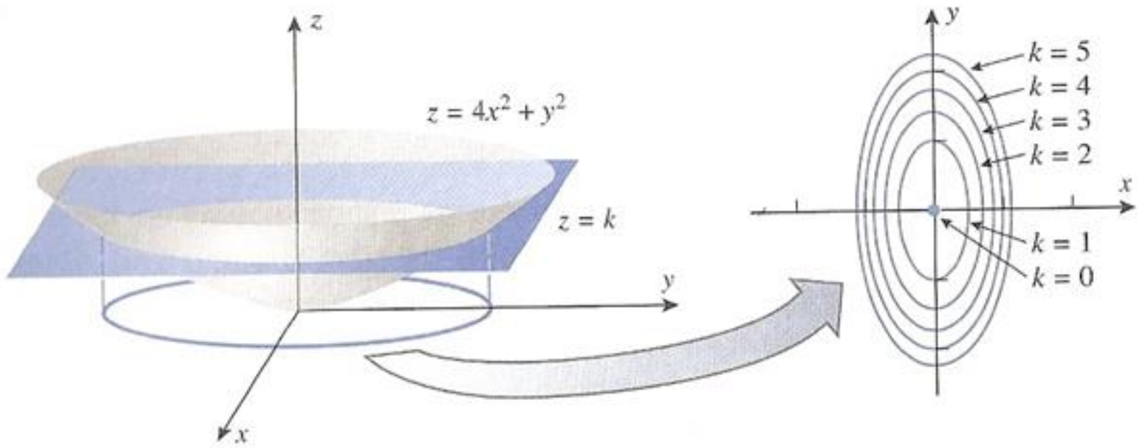


Figura 14

A curva no esboço na qual o plano $z = k$ corta uma superfície $z = f(x, y)$ consiste em todos os pontos que representam o valor da função $f(x, y)$.

Na maioria dos mapas, as curvas que representam altitude constante são chamadas de contornos, não de curva de nível.

Uma superfície de nível é simplesmente uma superfície sobre a qual todos os valores de f são o mesmo.

1.5 CONJUNTOS ABERTOS E FECHADOS

Embora os limites ao longo de curvas sejam úteis em muitas ocasiões, eles nem sempre contam toda a história sobre o comportamento limite de uma função num ponto; o que se precisa é de um conceito de limite que dê conta do comportamento da função em toda uma vizinhança de um ponto, e não só ao longo de curvas lisas que passem pelo ponto.

As definições de interior, fronteira, aberto e fechado para regiões no espaço são similares àquelas para regiões no plano. Para acomodar a dimensão extra usamos esferas sólidas.

1.5.1 DEFINIÇÃO: Um ponto (x_0, y_0, z_0) em uma região R no espaço é um *ponto interior* de R se é o centro de uma esfera sólida que está inteiramente em R. O *interior* de R é o conjunto dos pontos interiores de R.

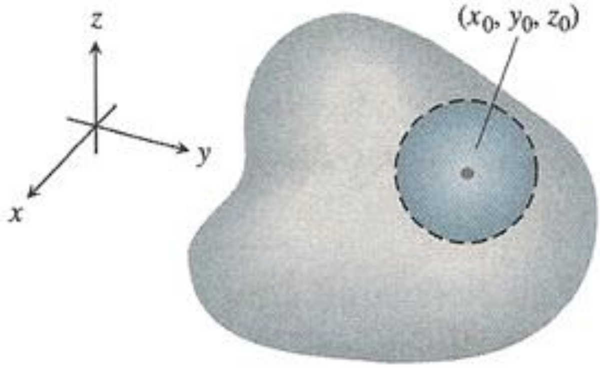


Figura 15

EXEMPLO 10: Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 2\}$, o ponto $P(4,4)$ é interior a A e o ponto $P'(3,2)$ não é interior a A.

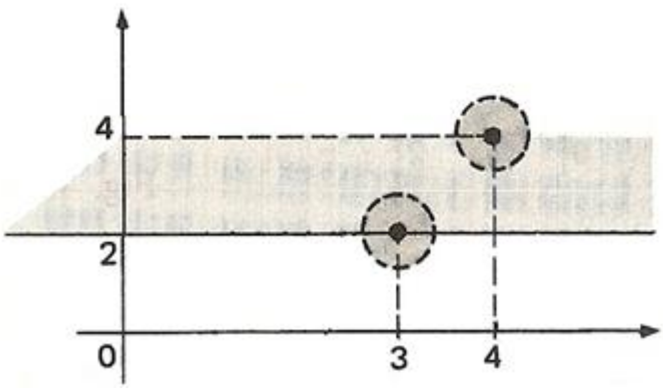


Figura 16

1.5.2 DEFINIÇÃO: Um ponto (x_0, y_0, z_0) é um *ponto de fronteira* de R se toda esfera centrada em (x_0, y_0, z_0) contém pontos que estão fora de R assim como pontos que estão dentro de R. A *fronteira* de R é o conjunto dos pontos de fronteira de R.

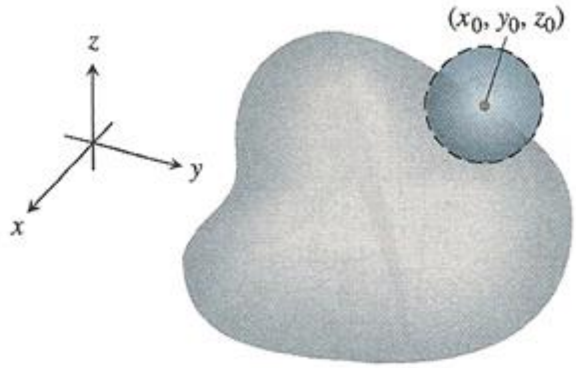


Figura 17

EXEMPLO 11: Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 2\}$. Os pontos da reta $y = 2$ são pontos de fronteira de A.

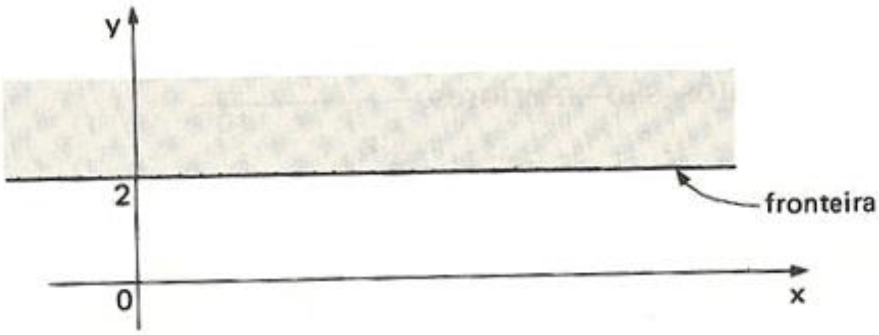


Figura 18

EXEMPLO 12: Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$. Os pontos da circunferência $x^2 + y^2 \leq 1$ são pontos de fronteira de B.

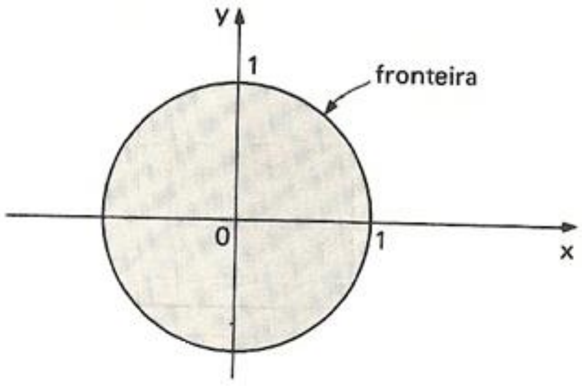


Figura 19

1.5.1 DEFINIÇÃO: Seja S uma esfera no espaço tridimensional centrada em (x_0, y_0, z_0) e de raio positivo δ. O conjunto de todos os pontos englobados pela esfera, mas que não estejam sobre a esfera, é denominado *bola aberta* de raio δ centrada em (x_0, y_0, z_0) e o conjunto de todos os pontos da esfera junto com os englobados pela esfera, é a *bola fechada* de raio δ centrada em (x_0, y_0, z_0).

EXEMPLO 13: A bola aberta do $\mathbb{R}^3$ de centro $C(2,3,4)$ e raio 1 é a da figura 20.

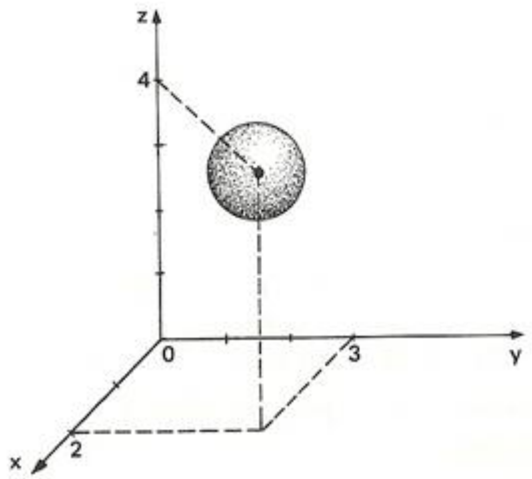


Figura 20

Em síntese, uma região é *aberta* se consiste inteiramente em pontos interiores. São exemplos de conjuntos *abertos* no espaço o interior de uma esfera, o semi-espaço aberto

$z > 0$, o primeiro octante (onde x, y e z são todos positivos) e o próprio espaço. E uma região é *fechada* se ela contém toda a sua fronteira. São exemplos de conjuntos *fechados* no espaço retas, planos, o semi-espaço fechado $z \geq 0$, o primeiro octante junto com os seus planos se fronteira e o próprio espaço (uma vez que ele não tem ponto de fronteira).

Uma esfera sólida com parte da sua fronteira removida ou um cúbo sólido sem uma face, aresta ou vértice não é *nem aberto nem fechado.*

EXEMPLO 14: O conjunto $A = \{(x, y)|x > 2\}$ é aberto pois todos os seus pontos são interiores.

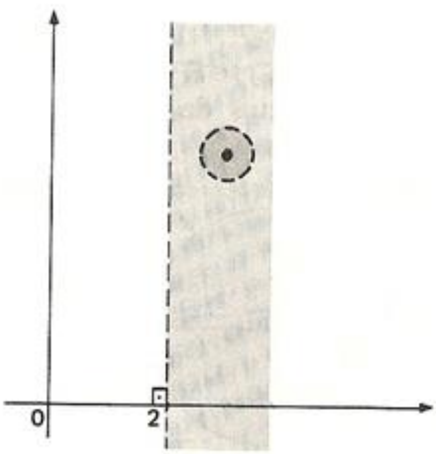


Figura 21

EXEMPLO 15: O conjunto $B = \{(x, y)|x \geq 2\}$não é aberto pois os pontos da reta $x = 2$ não são interiores a A.

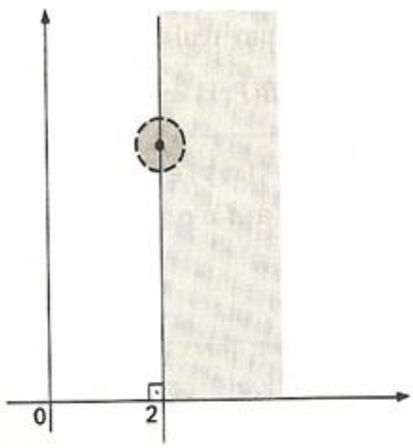


Figura 22

2 LIMITE E CONTINUIDADE PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

As noções de limite e continuidade para funções de duas ou mais variáveis são similares as de funções de uma variável, mas com uma diferença crucial, pois há mais de uma variável independente envolvida, o que complica a questão da proximidade.

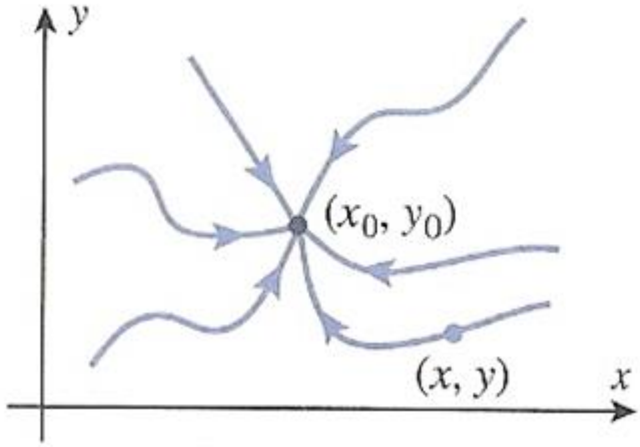


Figura 1

Diferentemente de funções de uma única variável x que só se aproxima de x_0 ao longo do eixo x, pela esquerda e pela direita, quando lidamos com funções de mais variáveis, a direção de aproximação pode ser um problema, pois se (x_0, y_0) é um ponto interior do domínio de f, isto para funções de duas variáveis, (x, y) pode se aproximar de (x_0, y_0) a partir de qualquer direção.

2.1 LIMITE

O limite de uma função tem o objetivo de transmitir a ideia de que, restringindo o ponto (x, y) a estar suficientemente próximo (mas distinto) do ponto (x_0, y_0), podemos forçar o valor de $f(x, y)$ a ficar tão próximo de L quanto queiramos.

2.1.1 DEFINIÇÃO: Seja f uma função de duas variáveis e supondo que f esteja definida em todos os pontos de algum disco aberto concentrado em (x_0, y_0), exceto., possivelmente, em (x_0, y_0). Escrevemos

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

se dado qualquer número $\epsilon > 0$, pudermos encontrar um número $\delta > 0$ tal que $f(x,y)$ satisfaça

$$|f(x,y) - L| < \varepsilon$$

sempre que a distância entre (x,y) e (x_0, y_0) satisfizer

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

Geometricamente temos que:

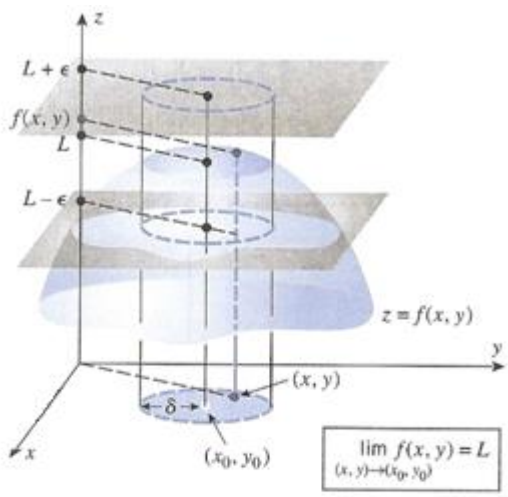


Figura 2

Esta região circular com o centro removido consiste em todos os pontos (x,y) que satisfazem

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Para cada ponto (x,y) dentro dessa região temos $|f(x,y) - L| < \varepsilon$. Nessa figura em particular essa condição é também satisfeita em (x_0, y_0), embora isso não seja relevante para o limite.

Esta outra ilustração mostrada no diagrama "de flecha",

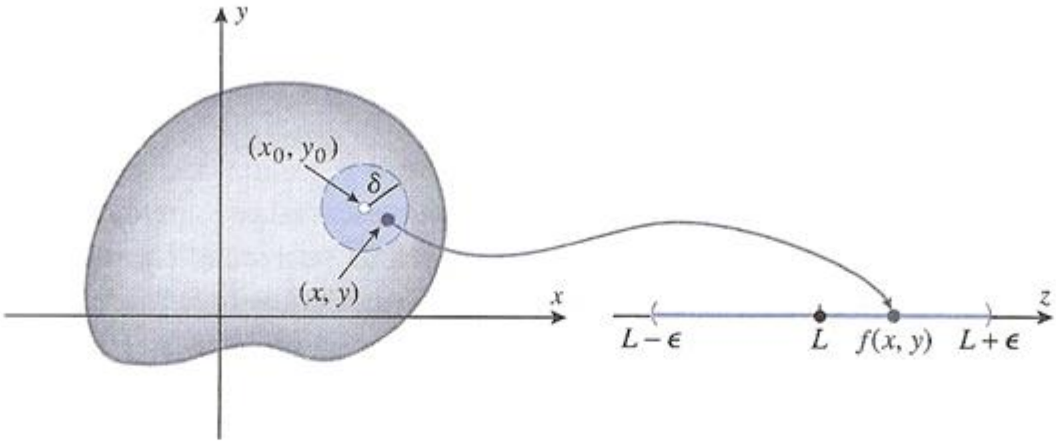


Figura 3

transmite a ideia de que os valores $f(x,y)$ podem ser forçados a cair a menos de ε unidades de L no eixo z pela exigência de que (x,y) esteja a menos de δ unidades de (x_0,y_0) no plano xy. O ponto branco em (x_0,y_0) sugere que a condição com épsilon não precisa valer nesse ponto.

EXEMPLO 01: Provemos, usando a definição, que

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5 \qquad \text{onde} \qquad f(x,y) = x + y$$

Dado $\varepsilon > 0$ devemos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$d(P,P_0) < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon,$$

isto é,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < \delta \Rightarrow |x + y - 5| < \varepsilon.$$

Como,

$$|x-2| \le \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} \quad \text{e} \quad |y-3| \le \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2},$$

segue-se que

$$|x + y - 5| < 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = 2d_{PP_0}.$$

Portanto, se tomarmos um número δ igual a $\frac{\varepsilon}{2}$, teremos

$$d(P, P_0) < \delta \Longrightarrow |x + y - 5| < \varepsilon,$$

e assim

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5.$$

Notamos sem prova que as propriedades padrão de limites são válidas para limites ao longo de curvas e para limites gerais de funções de duas variáveis, portanto os cálculos envolvidos em tais limites podem ser efetuados de maneira usual.

EXEMPLO 02: Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9]$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2 - 9] = \lim_{(x,y)\to(1,4)} [5x^3y^2] - \lim_{(x,y)\to(1,4)} 9$$

$$= 5\left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} x\right]^3 \left[\lim_{(x,y)\to(1,4)} y\right]^2 - 9 = 5(1)^3(4)^2 - 9 = 71$$

2.2 CONTINUIDADE

Uma função de uma variável é contínua se seu gráfico for uma curva não quebrada, sem saltos ou buracos. Para estender essa ideia para funções de duas variáveis, imaginemos que o gráfico de $z = f(x,y)$ esteja moldado a partir de uma fina camada de argila que tenha sido escavada ou apertada com força fazendo cumes e vales. Consideremos f como sendo contínua se a superfície de argila não tiver ruptura nem buracos.

Para que uma função seja contínua será necessário que o limite da função e o valor da função sejam o mesmo naquele ponto.

2.2.1 DEFINIÇÃO: Dizemos que uma função é $f(x,y)$ contínua em (x_0, y_0) se $f(x_0, y_0)$ estiver definido e se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Além disso, se f for contínua em cada ponto de um conjunto aberto D, então dizemos que f é contínua em D; e se f for contínua em todo plano xy, então dizemos que f é contínua em toda parte.

Caso L seja igual a $f(x_0, y_0)$, dizemos que f é contínua em (x_0, y_0), caso contrário f é dita descontínua em (x_0, y_0).Ou seja:

(i) f for definida em (x_0, y_0);

(ii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ existe;

(iii) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

Uma função é contínua quando é contínua em todos os pontos de seu domínio. Como acontece na definição de limite, a definição de continuidade aplica-se a pontos de fronteira como a pontos interiores do domínio de f. A única exigência é que o ponto (x,y) permaneça no domínio todo o tempo.

EXEMPLO 03: Seja $f(x,y) = x + y$.

O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) se aproxima de $(2,3)$ é o número 5.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5$$

$\therefore$ Como $f(x,y) = 5$, f é contínua em $(2,3)$

EXEMPLO 04: Seja $f(x,y) \ = \begin{cases} x + y \ se \ (x,y) \neq (2,3) \\ 6 \ se \ (x,y) = (2,3) \end{cases}$

O limite de $f(x,y)$ quando (x,y) se aproxima de $(2,3)$ é 5.

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} f(x,y) = 5$$

$\therefore$ Como $f(x,y) = 5$, f é descontínua em $(2,3)$.

2.2.2 TEOREMA: São contínuas em todos os pontos do seu domínio as funções:

(a) Polinomiais nas variáveis x e y;

(b) Racionais nas variáveis x e y.

EXEMPLOS 05:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \quad \text{(polinomial)}, \forall\, x, y$$

$$f(x,y) = x^3y^2 - xy + y^3 + 6 \quad \text{(polinomial)}, \forall\, x, y$$

$$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{xy - 1} \ \text{(racional)}, \forall\, x, y \text{ tais que } xy \neq 1$$

2.2.3 TEOREMA: Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são funções contínuas em (x_0, y_0), então também serão contínuas em (x_0, y_0) as funções:

(a) $f(x,y) + g(x,y)$

(b) $f(x,y) - g(x,y)$

(c) $k \cdot f(x,y) \quad (k \in \mathbb{R})$

(d) $f(x,y) \cdot g(x,y)$

(e) $\frac{f(x,y)}{g(x,y)} \quad (g(x_0, y_0) \neq 0)$

(f) $a^{f(x,y)} \quad (a > 0)$

(g) $cos\ [f(x,y)]$

(h) $sen\ [f(x,y)]$

DEMONSTRAÇÃO:

Sabemos que:

Se $f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0), $\forall\ \ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_1 \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

Se $g(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0), $\forall\ \ \epsilon > 0\ \exists\ \delta_2 > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta_2 \Longrightarrow |g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \epsilon$$

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

(a)

$$\left|f(x,y) + g(x,y) - \big(f(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\big)\right| =$$

$$= \left|\Big(f(x,y) - f(x_0,y_0) + \big(g(x,y) - g(x_0,y_0)\big)\Big)\right| \leq$$

$$\leq |f(x,y) - f(x_0,y_0)| + |g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$\forall\ \ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Longrightarrow \left|f(x,y) + g(x,y) - \big(f(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\big)\right| < 2\epsilon \quad \blacksquare$$

(b)

$$\left|f(x,y) - g(x,y) - \big(f(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\big)\right| =$$

$$= \left|\Big(f(x,y) - f(x_0,y_0) - \big(g(x,y) - g(x_0,y_0)\big)\Big)\right| \leq$$

$$\leq |f(x,y) - f(x_0,y_0)| - |g(x,y) - g(x_0,y_0)| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon$$

$\forall \ \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Longrightarrow \left|f(x,y) - g(x,y) - \big(f(x_0,y_0) - g(x_0,y_0)\big)\right| < 2\epsilon \qquad \blacksquare$$

(c)

Se $f(x,y)$ é contínua em (x_0,y_0), $\forall \ \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \frac{\epsilon}{|\mathrm{k}|}$$

$$|kf(x,y) - kf(x_0,y_0)| = \left|k\big(f(x,y) - f(x_0,y_0)\big)\right| = |\mathrm{k}||f(x,y) - f(x_0,y_0)| < |\mathrm{k}|\frac{\epsilon}{|\mathrm{k}|} = \epsilon$$

$\forall \ \ \epsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que

$$|(x,y) - (x_0,y_0)| < \delta \Longrightarrow |kf(x,y) - kf(x_0,y_0)| < \epsilon \qquad \blacksquare$$

EXEMPLOS 06:

(1) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy^3$, $\quad \forall\, x, y$

(2) $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$, $\quad \forall\, x \neq y$

(3) $f(x,y) = 2^{x-y^2}$, $\ \forall\, x, y$

(4) $f(x,y) = ln(x+y)$, $\forall\, x, y$ tais que $x + y > 0$

(5) $sen(x^2 + y)$, $\ \forall\, x, y$

(6) $f(x,y) = x^2 + e^x$, $\quad \forall\, x, y$

(7) $f(x,y) = (x + y^2) \cdot e^x$, $\quad \forall\, x, y$

3 DERIVADAS PARA FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

As técnicas desenvolvidas para diferenciar funções de uma variável podem ser generalizadas para funções de mais variáveis, no caso em questão para duas variáveis.

Quando fixamos todas as variáveis independentes de uma função, exceto uma, e derivamos em relação a essa variável, obtemos uma derivada "parcial".

Veremos como calcular derivadas parciais aplicando as regras para derivação de funções de uma variável.

3.1 DERIVADAS PARCIAIS

Se $z = f(x, y)$, então podemos indagar como valores de z variam se x for mantido fixado e y for permitido variar ou se o contrário ocorrer. Essas derivadas são tão importantes no estuco de Cálculo Diferencial de funções de várias variáveis que têm seu próprio nome e notação.

3.1.1 DEFINIÇÃO: Se $z = f(x, y)$ e (x_0, y_0) é um ponto no domínio de f, então a derivada parcial de f em relação a x em (x_0, y_0) é a derivada em x_0 da função que resullta quando $y = y_0$ for mantido fixado e a x for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_x(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,}y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \qquad \mathbf{(3.1.1)}$$

Analogamente, a derivada parcial de f em relação a y em (x_0, y_0) é a derivada em y_0 da função que resullta quando $x = x_0$ for mantido fixado e a y for permitido variar. Essa derivada parcial é denotada por $f_y(x_0, y_0)$ e é dada por

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta y} \qquad (\mathbf{3.1.2})$$

As definições $(\mathbf{3.1.1})$ e $(\mathbf{3.1.2})$ definem as derivadas parciais de uma função num ponto (x_0, y_0) específico.

EXEMPLO 01: Seja $f(x, y) = 2x + 3y$. Calcule $f_x(4{,}5)$ e $f_y(4{,}5)$.

SOLUÇÃO:

Dada a definição em relação a x:

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta x}\ .\ \text{Substituimos:}$$

$$f_x(4{,}5) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x,\ 5) - f(4{,}5)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(4 + \Delta x) + 3 \cdot 5 - 3 \cdot 5}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2.$$

Analogamente, dada a definição em relação a y:

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta x) - f(x_{0,} y_0)}{\Delta y}\ . \quad \text{Substituimos:}$$

$$f_y(4{,}5) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(4,\ 5 + \Delta y) - f(4{,}5)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (5 + \Delta y) - 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3\Delta y}{\Delta y} = 3.$$

3.2 FUNÇÃO DERIVADA PARCIAL

Se calcularmos f_x e f_y num ponto genérico (x, y), obtemos duas funções de x e y, onde a função $f_x(x, y)$ e dita derivada parcial de f em relação a x e $f_y(x, y)$ e dita derivada parcial de f em relação a y.

Para o cálculo de f_x e f_y aplicamos as regras de derivação de função de uma variável desde que:

(a) no cálculo de f_x, consideremos y uma constante;

(b) no cálculo de f_y, concederemos x uma constante.

EXEMPLO 02: Encontre $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$ para $f(x, y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$ e use essas derivadas parciais para calcular $f_x(1,3)$ e $f_y(1,3)$.

SOLUÇÃO:

Mantendo y fixando e derivando em relaçao a x, obtemos

$$f_x(x, y) = \frac{d}{dx}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 6x^2y^2 + 4$$

$$f_y(x, y) = \frac{d}{dy}[2x^3y^2 + 2y + 4x] = 4x^3y + 2$$

Assim,

$$f_x(1,3) = 6(1)^2(3)^2 + 4 = 58 \qquad \text{e} \qquad f_y(1,3) = 4(1)^3(3) + 2 = 14$$

3.3 SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DAS DERIVADAS PARCIAIS

No cálculo de $f_x(x_0, y_0)$ mantivemos y fixo no valor y_0 e calculamos a derivada de f que só dependia de x, ou seja, achamos a derivada da função de x no ponto x_0, cujo gráfico é a intersecção do gráfico de f com o plano de equação $y = y_0$.

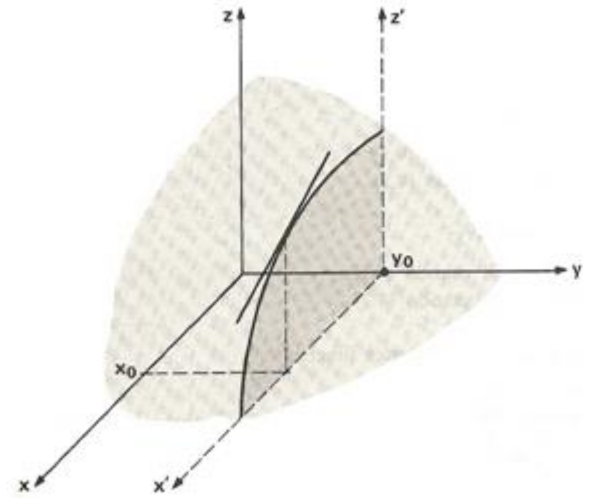


Figura 1

Portanto $f_x(x_0, y_0)$ representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico dessa curva no ponto da abscissa x_0 do sistema cartesiano $x'0'z'$ do gráfico acima.

Analogamente $f_y(x_0, y_0)$ representa o coeficiente angular da reta tangente á curva que é a intersecção do gráfico de f com o plano da equação $x = x_0$ no ponto da abscissa y_0 do sistema cartesiano $z'0'y'$ da figura abaixo.

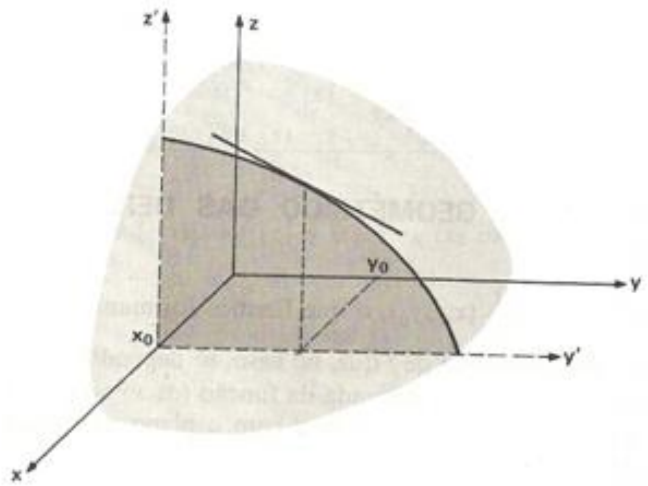


Figura 2

3.4 NOTAÇÃO DE DERIVADA PARCIAL

Se $z = f(x, y)$, então as derivadas parciais f_x e f_y são também denotadas pelos símbolos

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}$$

Algumas notações típicas para as derivadas parciais de $z = f(x, y)$ no ponto (x_0, y_0) são

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0, y=y_0}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}|_{(x_0,y_0)} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0,y_0)}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$$

3.5 DIFERENCIABILIDADE

Dizemos que uma função f é dita diferenciável num ponto (x_0, y_0) se Δf puder ser escrita na forma

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

onde o

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_1 = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \epsilon_2 = 0$$

O ponto de partida para a diferenciabilidade é a ideia de incremento. Vejamos a seguir o Teorema do Incremento para funções de duas variáveis.

3.5.1 TEOREMA: Suponha que as derivadas parciais de primeira ordem de $f(x, y)$ sejam definidas em uma região aberta R que contenha o ponto (x_0, y_0) e que f_x e f_y sejam contínuas em (x_0, y_0). Então a variação

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

no valor de f que resulta do movimento de (x_0, y_0) para um outro ponto $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ em que R satisfaz uma equação da forma

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

na qual $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$.

A parcela $f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ é chamada diferencial de f e é indicada por df (no caso de f ser diferenciável).

Seria muito trabalhoso ter que verificar cada função para saber qual é diferenciável e utilizá-lo como resultado aproximado de Δf. Para poupar este trabalho o teorema a seguir fornece condições para uma função de mais de duas variáveis ser diferenciável.

3.5.2 DEFINIÇÃO: Uma função f é diferenciável em (x_0, y_0) se $f_x(x_0, y_0)$ e $f_y(x_0, y_0)$ existem e Δf satisfaz uma equação da forma

$$\Delta f = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

na qual $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Dizemos que f e diferenciável se ela é diferenciável em todos os pontos de seu domínio.

EXEMPLO 03: A função $f(x, y) = 2x^2 + 4y^3$ é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$ pois $f_x = 4x$ e $f_y = 12y^2$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$. A diferencial de f vale $df = 4x\Delta x + 12y^2\Delta y$.

EXEMPLO 04: A função $f(x,y) = \frac{2x}{x-y}$ de domínio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\}$ é diferenciável em D pois $f_x = \frac{-2y}{(x-y)^2}$ e $f_y = \frac{2x}{(x-y)^2}$ são contínuas em D. A diferencial $df = \frac{-2y}{(x-y)^2}\Delta x + \frac{2x}{(x-y)^2}\Delta y$.

Com a definição anterior sobre diferenciabilidade, temos logo abaixo o corolário do Teorema (**4.5.1)**, que afirma que uma função é diferenciável se suas derivadas parciais são contínuas.

3.5.3 COROLÁRIO: Se as derivadas parciais f_x e f_y de uma função $f(x,y)$ são contínuas ao longo de uma região aberta R, então f é diferenciável em todos os pontos de R.

Se $z = f(x,y)$ é diferenciável, então a definição de diferenciabilidade assegura que $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ se aproximaa de 0 quando Δx e Δy se aproximam de 0. Isso nos diz que uma função de duas variáveis é contínua em todos os pontos onde ela é diferenciável.

O próximo Teorema diz que diferenciabilidade implica continuidade.

3.5.4 DEFINIÇÃO: Se uma função $f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0), então ela é contínua em (x_0, y_0).

3.6 DERIVADAS PARCIAIS DE SEGUNDA ORDEM

Suponha que f seja uma função de duas variáveis x e y. Como as derivadas parciais $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ também são funções de x e y, essas funções podem elas mesmas ter derivadas parciais. Isso origina quatro possíveis derivadas parciais de segunda ordem de f, que são definidas por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xx} \qquad \text{derivando duas vezes em relação a } x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy} \qquad \text{derivando duas vezes em relação a } x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} \qquad \text{derivando, primeiro em relação a } x \text{ e então em relação a } y.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} \qquad \text{derivando, primeiro em relação a } y \text{ e então em relação a } x.$$

Os dois últimos casos são denominados *derivadas parciais de segunda ordem mistas*. Além disso, as derivadas $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ são chamadas frequentemente de *derivadas parciais de primeira ordem*, quando necessário distingui-las das derivadas parciais de ordem superior.

EXEMPLO 05: Determine as derivadas parciais de segunda ordem de $f(x,y) = x^2y^3 + x^4y$.

SOLUÇÃO:

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4$$

e portanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3 + 4x^3y) = 2y^3 + 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 + x^4) = 6x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 + 4x^3y) = 6xy^2 + 4x^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 + x^4) = 6xy^2 + 4x^3$$

3.7 IGUALDADE DAS PARCIAIS MISTAS

Poderíamos esperar que uma função $f(x, y)$ tivesse quatro derivadas parciais de segunda ordem distintas: f_{xx}, f_{xy}, f_{yx} *e* f_{yy}. Contudo, observe que as derivadas parciais de segunda ordem mistas do exemplo **04**, anterior, são iguais. O teorema a seguir explica essa igualdade.

3.7.1 TEOREMA: Seja f uma função de duas variáveis. Se f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em algum disco aberto, então $f_{xy} = f_{yx}$ nesse disco.

Segue desse teorema que se $f_{xy}(a, b)$ *e* $f_{yx}(a, b)$ forem contínuas em todo domínio, então $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ para todos os valores de x e y. Como os polinômios são contínuos em todo domínio, isso explica por que as parciais de segunda ordem mistas do exemplo **(04)** são iguais.

DEMONSTRAÇÃO:

A chave par provar $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$ é que não importa quão pequeno é R' se f_{xy} e f_{yx} assumem valores iguais em algum lugar dentro de R' (embora não necessariamente no mesmo ponto).

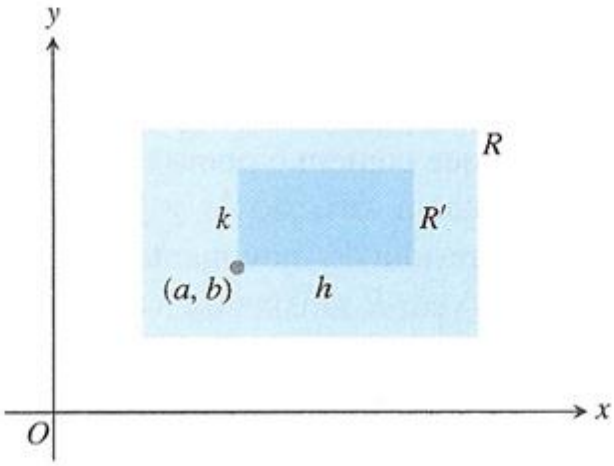


Figura 3

A igualdade de $f_{xy}(a,b)$ e $f_{yx}(a,b)$ pode ser estabelecida por quatro aplicações do Teorema do Valor edio. Por hipótese, o ponto (a,b) situa-se ni interior de um retângulo R no plano xy no qual f, f_x, f_y, f_{xy} e f_{yx} são todas definidas. Fazemos h e k serem os números nos quais o ponto $(a+h, b+k)$ também se situe em R e consideramos a diferença

$$\Delta = F(a+h) - F(a), \qquad \textbf{(1)}$$

onde

$$F(x) = f(x, b+k) - f(x,b). \qquad \textbf{(2)}$$

Aplicamos o Teorema do Valor Médio a F, que é comtínua porque é diferenciável, e a equação (1) torna-se

$$\Delta = hF'(c_1), \qquad \textbf{(3)}$$

onde c_1 situa-se entre a e $a+h$. Da equação (2),

$$F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x,b),$$

Então a equação (3) torna-se

$$\Delta = h[f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b)]. \qquad \textbf{(4)}$$

Agora aplicamos o Teorema do Valor Médio à função $g(y) = f_x(c_1, b)$ e temos

$$g(b+k)-g(b)=kg'(d_1),$$

ou

$$[f_x(c_1,b+k)-f_x(c_1,b)]=kf_{xy}(c_1,d_1)$$

Para algum d_1 entre b e $b+k$. Substituindo isso na equação $(\mathbf{4})$, obtemos

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1,d_1) \tag{5}$$

para algum ponto (c_1,d_1) no retângulo R' cujos vértices são os quatro pontos (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$ e $(a,b+k)$.

Substituindo da equação $(\mathbf{2})$ na equação $(\mathbf{1})$, podemos escrever também

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h,b+k)-f(a+h,b)-f(a,b+k)+f(a,b)=\\ &= f[f(a+h,b+k)-f(a,b+k)]-[f(a+h,b)-f(a,b)] \qquad (\mathbf{6})\\ &= \phi(b+k)-\phi(b)\end{aligned}$$

onde

$$\phi(y)=f(a+h,y)-f(a,y). \tag{7}$$

O teorema do Valor Médio aplicado à equação $(\mathbf{6})$ agora dá

$$\Delta = k\phi'(d_2), \tag{8}$$

para algum d_2 entre b e $b+k$. Pela equação $(\mathbf{7})$

$$\phi'(y)=f_y(a+b,y)-f_y(a,y). \tag{9}$$

Substituindo da equação $(\mathbf{9})$ na equação $(\mathbf{8})$ temos

$$\Delta = k\left[f_y(a+b, d_2) - f_y(a, d_2)\right].$$

Por fim, aplicamos o Teorema do Valor Médio à expressão em colchetes e obtemos

$$\Delta = khf_{yx}(c_2, d_2). \qquad (\mathbf{10})$$

Para algum c_2 entre a e $a+h$.

Juntas, a equação $(\mathbf{5})$ e $(\mathbf{10})$ mostram que

$$f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(c_2, d_2)$$

onde tanto (c_1, d_1) como (c_2, d_2) situam-se no retângulo R'. A equação $(\mathbf{11})$ não é bem o resultado que queremos, já que ela diz somente que f_{xy} tem o mesmo valor em (c_1, d_1) que f_{yx} tem em (c_2, d_2). Os números h e k em nossa discussão, entretanto, não podem ser tornados tão pequenos quanto desejarmos. A hipótese de que f_{xy} e f_{yx} são ambas contínuas em (a, b) significa que $f_{xy}(c_1, d_1) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_1$ e $f_{yx}(c_2, d_2) = f_{yx}(a, b) + \epsilon_2$, onde ϵ_1,$\epsilon_2 \to 0$ quando $h, k \to 0$. Portanto, se fazemos $h, k \to 0$, temos $f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$. ■

3.8 FUNÇÃO COMPOSTA - REGRA DA CADEIA

Se y for uma função diferenciável de x e x for uma função diferenciável de t, então a regra da cadeia para funções de uma variável afirma que, na composição, y resulta ser uma função diferenciável de t com

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Vejamos a regra da cadeia para funções de duas variáveis.

3.8.1 TEOREMA: Se $x = x(t)$ e $y = y(t)$ forem diferenciáveis em t e se $w = f(x, y)$ for difernciável no ponto $(x, y) = (x(t), y(t))$, então $w = f(x(t), y(t))$ é diferenciável em t e

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (\mathbf{4.8.1})$$

onde as derivadas comuns são calculadas em t e as derivadas parciais são calculadas em (x, y).

DEMONSTRAÇÃO:

A demonstração consiste em mostrar que, se x e y forem diferenciáveis em $t = t_0$ então w será diferenciável em t_0 e

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0},$$

onde $P_0 = (x(t_0), y(t_0))$.

Sejam Δx, Δy e Δz os incrementos que resultam da variação de t de t_0 para $t_0 + \Delta t$. Como f é diferenciável

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

onde $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \to 0$ quando $\Delta x, \Delta y \to 0$. Para encontrarmos ${}^{dw}/_{dt}$, dividimos essa equação por Δt e fazemos Δt aproximar-se de zero. O resultado da divisão é

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Fazendo Δt aproximar-se de zero temos

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{P_0} \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{P_0} \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t_0} + 0 \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t_0} \qquad \blacksquare$$

O diagrama abaixo propõe uma maneira conveniente de lembrar da Regra da Cadeia.

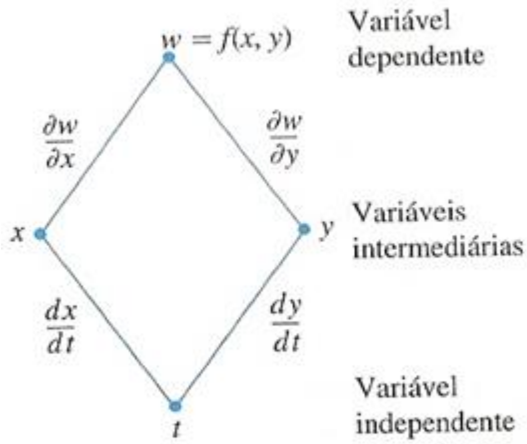


Figura 4

No diagrama, quando $t = t_0$, as derivadas dx/dt e dy/dt são calculadas em t_0. O valor de t_0 determina então o valor de x_0 para a função diferenciável em x e o valor y_0 para a função diferenciável y. As derivadas parciais $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ (as quais são funções de x e y) são calculadas no ponto $P_0(x_0, y_0)$ correspondente a t_0. A variável independente ‘verdadeira’ é t, enquanto x e y são variáveis intermediárias (controladas por t) e w é a variável dependente.

EXEMPLO 06: Suponha que $w = x^2 y, \quad x = t^2, \quad y = t^3$. Use a regra da cadeia para encontrar dw/dt e verifique o resultado expressando w como uma função de t e derivando diretamente.

SOLUÇÃO:

Pela regra da cadeia

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (2xy)(2t) + (x^2)(3t^2) = (2t^5)(2t) + (t^4)(3t^2) = 7t^6$$

Alternativamente, podemos expressar z diretamente como uma função de t,

$$w = x^2y = (t^2)^2(t^3) = t^7$$

e então derivar para obter $dw/dt = 7t^6$. Contudo, este procedimento nem sempre será conveniente.

EXEMPLO 07: Use a Regra da Cadeia para encontrar a derivada de $w = xy$ em relação a t ao longo do caminho $x = cos\, y,\ y = sen\, t$. Qual é o valor da derivada em $t = \pi/2$?

SOLUÇÃO:

Aplicamos a Regra da Cadeia para encontrar dw/dt como a seguir:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial(xy)}{\partial x}\cdot\frac{d}{dt}(cos\ t) + \frac{\partial(xy)}{\partial y}\cdot\frac{d}{dt}(sen\ t) = (y)(-sen\ t) + (x)(cos\ t) =$$

$$= (sen\ t)(-sen\ t) + (cos\ t)(cos\ t) = -sen^2t + cos^2t = cos(2t).$$

Neste exemplo, podemos verificar o resultado com um cálculo mais direto. Como uma função de t,

$$w = xy = cos\ t\ sen\ t = \frac{1}{2}sen\ 2t,$$

assim

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}sen\ 2t\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\ cos\ 2t = cos\ 2t.$$

Em ambos os casos, para um dado valor de t,

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t={}^{\pi}/_{2}} = cos\,\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) = cos\,\pi = -1.$$

3.9 FUNÇÕES DEFINIDAS IMPLICITAMENTE

Vejamos o que diz o Teorema da função implícita.

3.9.1 TEOREMA: "Sejam $f(x,y)$ e f_y funções contínuas em D e $(x_0,y_0)\in D$. Se $f(x_0,y_0)=0$ e $f_y(x_0,y_0)\neq 0$, não existe um intervalo I aberto, com centro em x_0, onde a equação $f(x_0,y_0)=0$ define implicitamente uma única função derivável $y=h(x)$, tal que $y_0=h(x_0)$ e $f\big(x,h(x)\big)=0\;\forall\, x\in I$."

EXEMPLO 08: A equação $f(x,y)=x^3y+xy^3+x^2y^2+xy-4=0$ define implicitamente uma função $y=h(x)$, num intervalo I centrado em $x_0=1$, pois:

(a) f e f_y são contínuas;

(b) $f(1,1)=0$;

(c) $f_y=x^3+3xy^2+2x^2y+x$ e $f_y(1,1)=7\neq 0$.

Para a derivada de uma função definida implicitamente consideremos uma função derivável $y=h(x)$, definida implicitamente pela equação $f(x,y)=0$. Como $F(x)=f\big(x,h(x)\big)=0$, segue-se, pela regra da cadeia, que

$$F'(x)=\frac{\delta f}{\delta x}\cdot 1+\frac{\delta f}{\delta y}\cdot\frac{dy}{dx}=0.$$

Logo,

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}}} \qquad (\mathbf{3.9.2})$$

EXEMPLO 09: Consideremos a equação $f(x,y) = 2x^2 + y - 1 = 0$. Tal equação define implicitamente a função $y = 1 - 2x^2$.

SOLUÇÃO:

Calculemos $\frac{dy}{dx}$ diretamente e pela formula de derivada de funções definidas implicitamente.

(a) diretamente:

$$\frac{dy}{dx} = -4x$$

(b) pela fórmula $(\mathbf{4.9.2})$:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} = -\frac{4x}{1} = -4x.$$

4 MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE DUAS VARIÁVEIS

Uma importante aplicação do estudo de derivadas parciais, é o da otimização de funções. Muitos problemas práticos requerem minimizar um custo ou maximizar uma área, ou, de alguma forma, encontrar a melhor saída de uma situação.

Os problemas de otimização são algumas das aplicações mais importantes do Cálculo Diferencial, em que se pretende encontrar a melhor maneira de se fazer algo.

Aperfeiçoar uma função significa encontrar seu ponto de máximo ou de mínimo. Assim, determinar a máxima produção possível de uma firma com um dado orçamento constitui-se num problema de maximização; entre as possíveis combinações de insumos, aquela que nos permite obter um certo nível de produção, a custo mínimo, consiste num problema de minimização. Vamos tornar mais precisas essas ideias, com algumas definições.

4.1 REGIÕES FECHADAS E LIMITADAS

Um conjunto de pontos no espaço tridimensional é *limitado* se o conjunto couber dentro de alguma caixa e é *ilimitado*, caso ocorra o contrário.

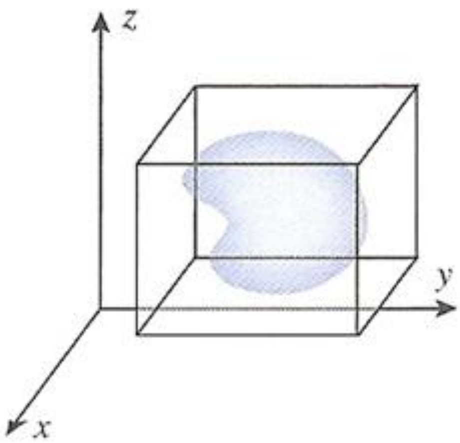


Figura 1

Funções contínuas de duas variáveis assumem valores extremos em domínios fechados e limitados. Podemos procurar esses valores examinando as derivadas parciais de primeira ordem da função. Uma função de duas variáveis pode assumir valores extremos apenas nos pontos de fronteira do domínio ou nos pontos interiores onde ambas as derivadas de primeira ordem são zero ou onde uma ou ambas as derivadas parciais de primeira ordem não existem, no entanto a anulação das derivadas em um ponto (x_0, y_0) nem sempre indica a presença de valor extremo.

4.2 EXTREMOS RELATIVOS

Se f tem um máximo ou mínimo relativo em (x_0, y_0), então f tem um extremo relativo em (x_0, y_0). Um valor máximo ou mínimo relativo de uma função é chamado de *extremo relativo* ou *extremo local* da função.

Uma cadeia de montanhas pode ser tomada como um gráfico de uma função f de duas variáveis, sendo os cumes os máximos relativos de f e as bases dos vales os mínimos relativos de f.

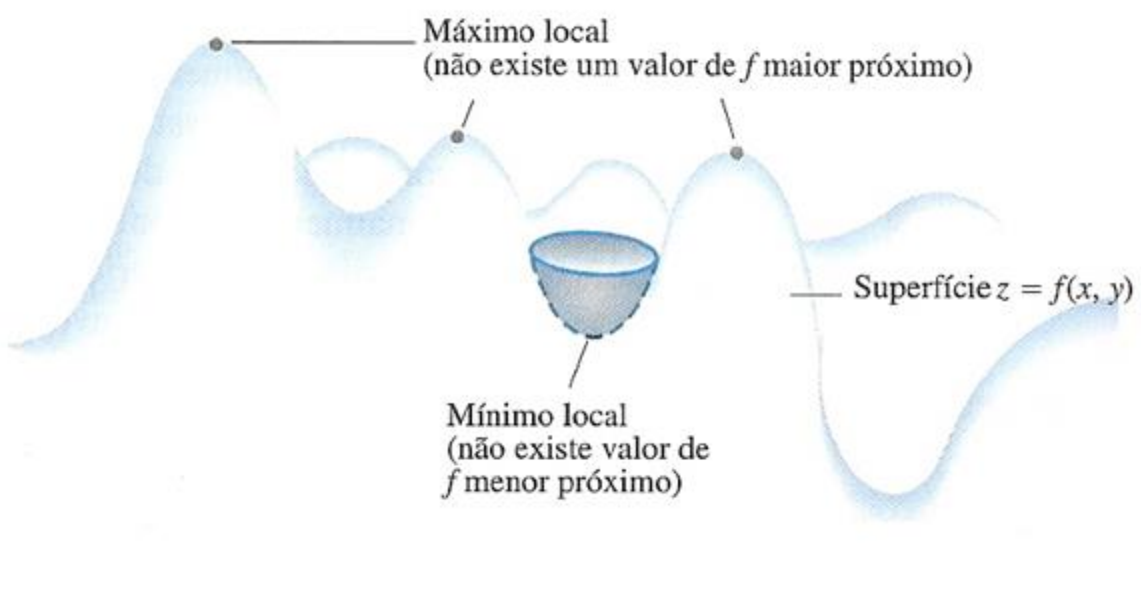


Figura 2: Máximo local é o pico de uma montanha e o mínimo local é um vale.

4.2.1 DEFINIÇÃO: Uma função f de duas variáveis tem um *valor máximo relativo ou máximo local* $f(x_0, y_0)$ em um ponto (x_0, y_0) se há um disco circular de raio positivo com centro em (x_0, y_0), tal que se (x, y) é um ponto no interior dessa vizinhança, então (x, y) está no domínio de f e $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.

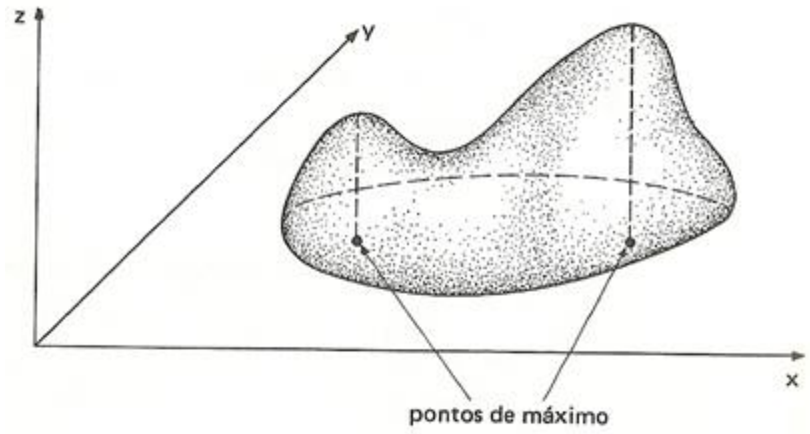


Figura 3

EXEMPLO 01: A função $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ tem ponto crítico em (0,0). Para o parabolóide, a derivada parcial na origem é zero. Observamos que os traços no plano xz e yz tem as retas tangentes horizontais em (0,0). O parabolóide tem um máximo relativo e absoluto na origem.

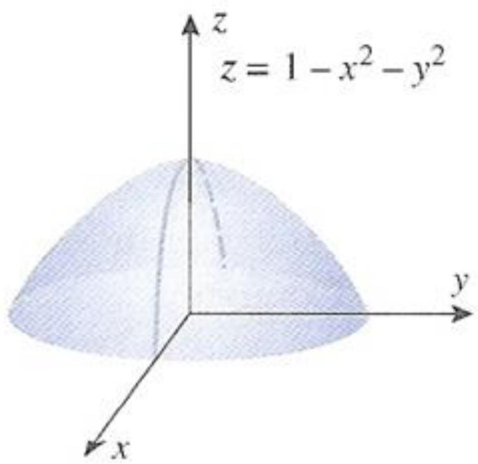


Figura 4

4.2.2 DEFINIÇÃO: Uma função f de duas variáveis tem um *valor mínimo relativo ou mínimo local* $f(x_0, y_0)$ em um ponto (x_0, y_0) se há um disco circular de raio positivo com centro em (x_0, y_0), tal que se (x, y) é um ponto no interior dessa vizinhança, então (x, y) está no domínio de f e $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.

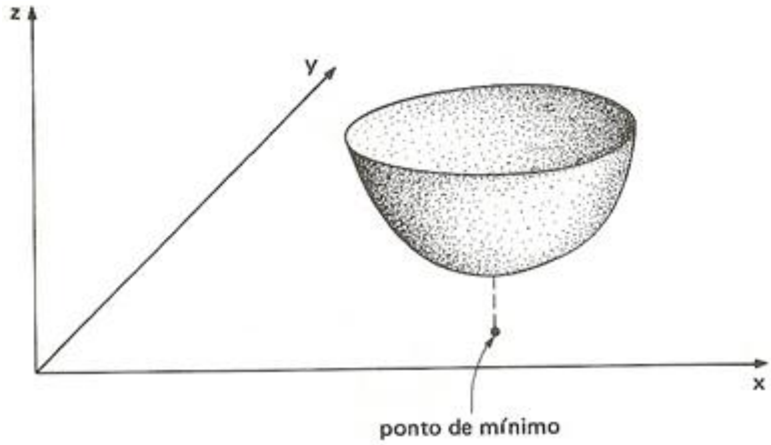


Figura 5

EXEMPLO 02: A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ tem ponto crítico em $(0,0)$. Para o parabolóide, a derivada parcial na origem é zero. Observamos que os traços no plano xz e yz tem as retas tangentes horizontais em $(0,0)$. O parabolóide tem um mínimo relativo e absoluto na origem.

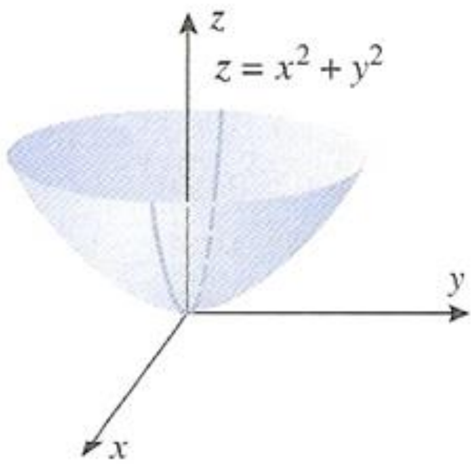


Figura 6

Geralmente a descoberta de um ponto de máximo ou de mínimo exige o conhecimento do gráfico de f, no entanto, esta não costuma ser uma tarefa fácil. Contudo, como veremos a seguir, existem teoremas que nos auxiliam nesta tarefa.

A chave para identificar extremos locais é o teste da derivada de primeira ordem. O teorema a seguir fornece-nos um critério para selecionar, entre os pontos interiores de D, candidatos a extremantes locais de f.

4.2.3 TEOREMA – Teste da derivada de primeira ordem para valores extremos locais: Se $f(x, y)$ tiver um valor de máximo ou mínimo local em um ponto interior (a, b) do seu domínio e se as derivadas parciais de primeira ordem existirem nesse ponto, então $f_x(a, b) = 0$ e $f_y(a, b) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha que f tenha um valor máximo local em um ponto interior (a, b) de seu domínio. Então

1. $x = a$ é um ponto interior do domínio da curva $z = f(x, b)$ no qual o plano $y = b$ corta a superfície $z = f(x, y)$.
2. A função $z = f(x, b)$ é uma função diferenciável de x em $x = a$ (a derivada é $f_x(a, b)$).
3. A função $z = f(x, b)$ tem um valor máximo local em $x = a$.
4. O valor da derivada de $z = f(x, b)$ em $x = a$, portanto, é zero. Como essa derivada é $f_x(a, b)$, concluímos que $f_x(a, b) = 0$.

Um argumento similar com a função $z = f(a, b)$ mostra que $f_y(a, b) = 0$.

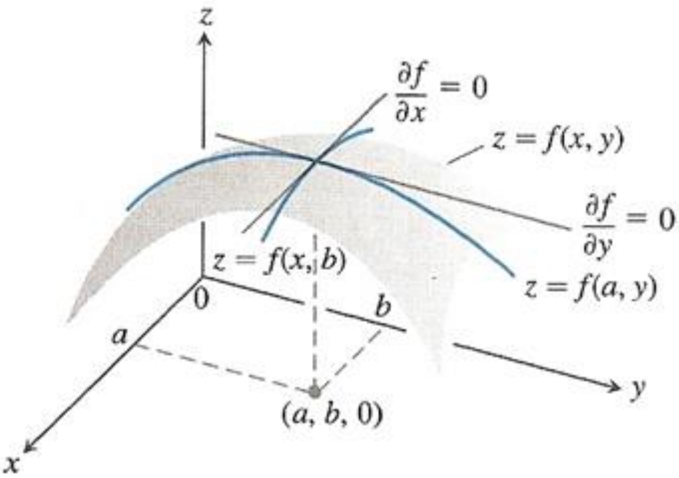


Figura 7: Um máximo local de f ocorre em $x = a, y = b$.

Isso prova o teorema para valores máximos locais. Se substituirmos os valores $f_x(a,b) = 0$ e $f_y(a,b) = 0$ na equação

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b_0) - \big(z - f(a,b)\big) = 0$$

para o plano tangente à superfície $z = f(x,y)$ em (a,b), a equação se reduz a

$$0 \cdot (x-a) + 0 \cdot (y-y_0) - z + f(a,b) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = f(a,b).$$

Portanto, o **Teorema 4.2.3** diz que a superfície tem de fato um plano tangente horizontal em um extremo local, desde que exista um plano tangente nesse ponto. Logo, os únicos lugares onde uma função $f(x,y)$ pode ter um valor extremo são

1. Pontos interiores onde $f_x = f_y = 0$;
2. Pontos interiores onde f_x ou f_y ou ambas não existam;
3. Pontos de fronteira do domínio da função.

4.2.4 TEOREMA - Condição necessária para o extremo relativo: Se $f(x,y)$ tiver um valor máximo ou mínimo relativo em um ponto interior (x_0, y_0) do seu domínio e se as derivadas parciais de primeira ordem existirem nesse ponto, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto de máximo, e consideremos a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r, no interior de D.

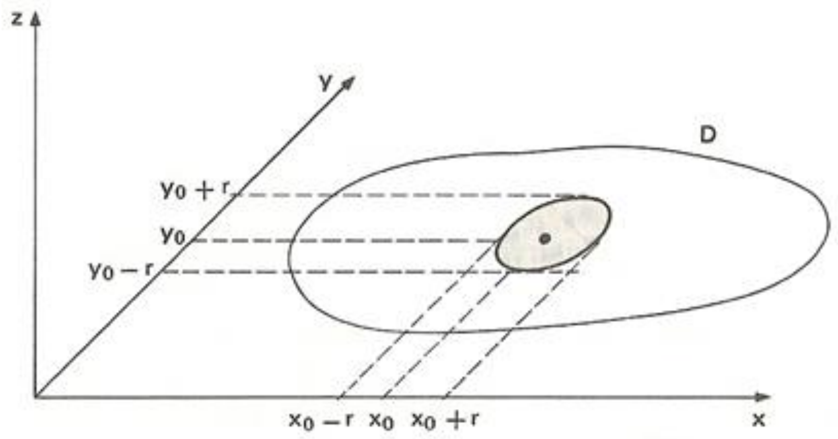


Figura 8

Para todo ponto dessa bola $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$. Consideremos os pontos dessa bola para os quais $y = y_0$. Então $f(x, y_0)$ será função somente de x. Mas, como $f(x, y_0) \leq f(x_0, y_0)$ para $x_0 - r < x < x_0 + r$, segue-se que a função $f(x, y_0)$ de uma variável tem ponto de máximo em (x_0, y_0) e, consequentemente, $f_x(x_0, y_0) = 0$.

Analogamente, se considerarmos os pontos da bola aberta para os quais $x = x_0$, então $f(x_0, y)$ será só função y. Mas, como $f(x_0, y) \leq f(x_0, y_0)$ para $y_0 - r < y < y_0 + r$, segue-se que a função $f(x_0, y)$ de uma variável tem ponto de máximo em (x_0, y_0) e, consequentemente, $f_y(x_0, y_0) = 0$.

Em resumo se (x_0, y_0) é ponto de máximo, então $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$. A demonstração é análoga se (x_0, y_0) é um ponto de mínimo. ■

Os pontos que anulam simultaneamente as derivadas f_x e f_y são chamados pontos críticos de uma função f, ou seja, os pontos críticos ou pontos de fronteira são os únicos pontos onde uma função pode assumir valores extremos.

4.2.5 DEFINIÇÃO: Um ponto (x_0, y_0) no domínio de uma função $f(x, y)$ é denominado *ponto crítico* da função de $f_x(x_0, y_0) = 0$ e $f_y(x_0, y_0) = 0$ ou se uma ou ambas derivadas parciais não existirem em (x_0, y_0).

EXEMPLO 03: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 1$. Os possíveis pontos de máximo ou de mínimo são aqueles para os quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$. Então

$$f_x = 2x - 2 \qquad\qquad f_y = 2y$$

Igualando a zero essas derivadas parciais, obtemos

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução é o ponto $(1,0)$.

Portanto, o **Teorema 4.2.4** garante que se f tiver um valor extremo, este só poderá ser o ponto $(1,0)$.

EXEMPLO 04: Seja $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + xy$. Os possíveis pontos de máximo ou de mínimo são aqueles para os quais $f_x = 0$ e $f_y = 0$.

Então:

$$f_x = 2x - 2 + y \qquad\qquad f_y = 2y - 2 + x$$

Igualando a zero essas derivadas parciais, obtemos

$$\begin{cases} 2x - 2 + y = 0 \\ 2y - 2 + x = 0 \end{cases}$$

cuja solução é o ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Portanto, o **Teorema 4.2.4** garante que se f tiver um valor extremo relativo, este só podeá ser o ponto $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

É relevante saber que nem todo ponto crítico é um extremo local e o ponto crítico só se aplica a pontos interiores ao domínio. Assim, os pontos que anulam f_x e f_y só podem ser pontos de máximo ou de mínimo do interior do domínio. A análise dos *pontos de fronteira*, como veremos mais adiante, deve ser feita à parte. De modo geral, todo ponto crítico (x_0, y_0) que não é de máximo ou de mínimo é um ponto de *ponto de sela*.

4.2.6 DEFINIÇÃO: Uma função diferenciável $f(x, y)$ tem um *ponto de sela* em um ponto crítico (x_0, y_0) se em todo disco aberto centrado em (x_0, y_0) existem pontos do domínio (x, y) onde $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ e pontos do domínio (x, y) onde $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. O ponto correspondente $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ na superfície $z = f(x, y)$ é chamado de ponto de *sela da superfície*.

EXEMPLO 05: A função $f(x, y) = y^2 - x^2$ é uma função cujo gráfico é um parabolóide hiperbólico. Tem um ponto crítico em $(0,0)$, pois

$$f_x = -2x \qquad\qquad f_y = 2y$$

do qual tem-se que

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{e} \quad f_y(0,0) = 0$$

Entretanto, a função f não tem máximo nem mínimo relativo em $(0,0)$. Por isso o ponto $(0,0)$ é chamado de ponto de sela de f.

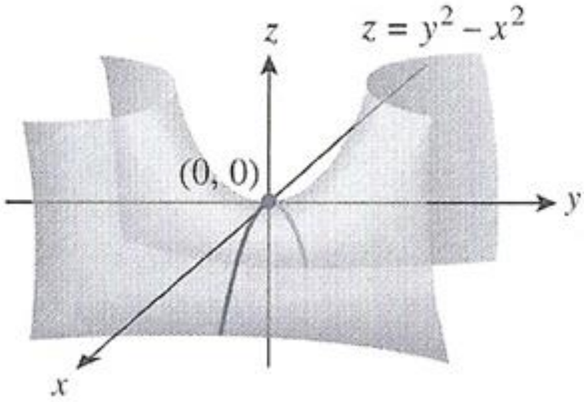


Figura 9

Em geral dizemos que uma superfície $z = f(x, y)$ tem um ponto de sela em (x_0, y_0), se houver dois planos verticais distintos que passem nesse ponto, tais que o traço da superfície em um dos planos tem um máximo relativo em (x_0, y_0) e o traço no outo tem um mínimo relativo em (x_0, y_0).

4.3 CARACTERIZAÇÃO DE UM PONTO DE MÁXIMO OU DE MÍNIMO

O Teste da derivada de primeira ordem tem as suas as suas limitações, pois ele não se aplica a pontos de fronteira no domínio de uma função, onde é possível que a função tenha valores extremos com derivadas diferentes de zero. Também não se aplica a pontos onde f_x ou f_y não existam.

Isto é, fato de que $f_x = f_y = 0$ em um ponto interior (a, b) de R não garante que f tenha um valor extremo local nesse ponto, contudo se f e suas derivadas de primeira e segunda ordem forem contínuas em R, poderemos aprender mais a partir do teorema a seguir.

4.3.1 TEOREMA – Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos locais: Seja (a, b) um ponto interior ao domínio da função f e suponha que as primeiras e as segundas derivadas parciais de f existam e sejam contínuas em algum disco circular centrado em (a, b) contido no domínio de f, ou seja $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$. Seja ainda

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix} = f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2$$

Então:

(i) Se $\Delta > 0$ e $f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b) < 0$, então f tem máximo relativo em (a, b).

(ii) Se $\Delta > 0$ e $f_{xx}(a, b) + f_{yy}(a, b) > 0$, então f tem mínimo relativo em (a, b).

(iii) Se $\Delta < 0$, então f tem um ponto de sela em (a, b).

(iv) Se $\Delta = 0$, então o teste é inconclusivo e outros métodos precisam ser usados.

Esse é o Teste da derivada de segunda ordem para valores extremos relativos. A expressão $f_{xx}(a, b)f_{yy}(a, b) - \left[f_{xy}(a, b)\right]^2$ é chamada de *discriminante* ou *hessiano* de f.

O **teorema 4.3.1** diz que, se o discriminante é positivo em um ponto (a, b) então a superfície se curva da mesma maneira em todas as direçãoes: para baixo de $f_{xx}(a, b) < 0$, dando origem a um máximo local, e para cima se $f_{xx}(a, b) > 0$, dando um mínimo local. Por outro lado, se o discriminante é negativo em (a, b), então a superfície se curvapara cima em algumas direções e para baixo em outras, assim temos um ponto de sela.

DEMONSTRAÇÃO:

Para deduzir o teste da derivada segunda para valores extremos locais usaremos a fórmula de Taylor. Começamos a dedução em $P(a, b)$ parametrizando um segmento de reta típico de P a um ponto S próximo.

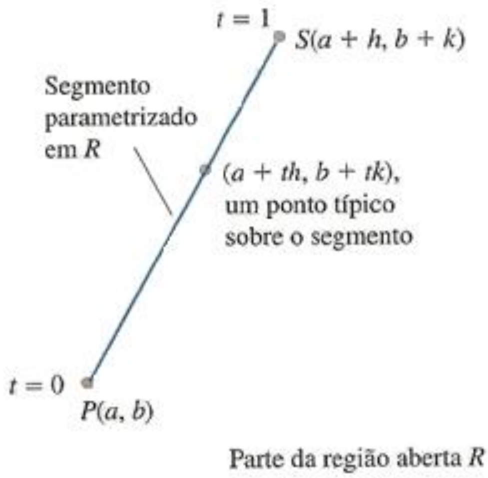


Figura 10

Suponha que $f(x, y)$ tenha derivadas parciais contínuas em uma região aberta R que contém um ponto $P(a, b)$ onde $f_x = f_y = 0$. Sejam h e k incrementos pequenos o suficiente para que o ponto $S(a + h, b + k)$ e o segmento de reta que o liga a P estejam contidos em R. Parametrizando o segmento PS como

$$x = a + th, \qquad y = b + tk, \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Se $F(t) = f(a + th, b + tk)$, a Regra da Cadeia dá

$$F'(t) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = hf_x + kf_y.$$

Como f_x e f_y são diferenciáveis (têm derivadas parciais contínuas), F' é uma função diferenciável de t e

$$F'' = \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(hf_x + kf_y\right) \cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\left(hf_x + kf_y\right) \cdot k =$$

$$= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}. \qquad \left(f_{xy} = f_{yx}\right)$$

Como F e F' são contínuas em $[0,1]$ e F' é diferenciável em $(0,1)$, podemos aplicar a fórmula de Taylor com $n = 2$ e $a = 0$ para obter

$$F(1) = F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c)\frac{(1-0)^2}{2}$$

$$F(1) = F(0) + F(0) + \frac{1}{2}F''(c) \qquad \textbf{(I)}$$

para algum c entre 0 e 1. Escrevendo a equação (1) em termos de f temos

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b)$$

$$+\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)} \qquad \textbf{(II)}$$

Como $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, esta última equação se reduz a

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = +\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)} \qquad \textbf{(III)}$$

A presença de um extremo de f em (a,b) é determinada pelo sinal de $f(a+h, b+k) - f(a,b)$. Pela equação $(\mathbf{III})$, esse é o mesmo sinal de

$$Q(c) = \left(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy}\right)\Big|_{(a+ch,b+ck)}.$$

Agora, se $Q(c) \neq 0$, o sinal de $Q(c)$ será o mesmo que o sinal de $Q(c)$ para valores de h e k suficientemente pequenos. Podemos prever o sinal de

$$Q(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b) \qquad \textbf{(IV)}$$

a partir dos sinais de f_{xx} e $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2$ em (a,b). Multiplique ambos os lados da equação $(\mathbf{IV})$ por f_{xx} e rearranje o lado direito para obter

$$f_{xx}Q(0) = \left(hf_{xx} + kf_{xy}\right)^2 + \left(f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2\right)k^2 \qquad \textbf{(V)}$$

em que (a,b). Pela equação $(\mathbf{V})$**,** vemos que

(i) Se $f_{xx} < 0$ e $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ em (a,b), então $Q(0) > 0$ para todos os valores de h e k suficientemente pequenos e diferentes de zero, e f tem valor máximo local em (a,b).

(ii) Se $f_{xx} > 0$ e $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$ em (a, b), então $Q(0) > 0$ para todos os valores de h e k suficientemente pequenos e diferentes de zero, e f tem valor mínimo local em (a, b).

(iii) Se $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 < 0$ em (a, b), existem combinações de valores não-nulos de h e k então arbitrariamente pequenos para os quais $Q(0) > 0$ e outros valores para os quais $Q(0) < 0$. Arbitrariamente próximo do ponto $P_0\big(a, b, f(a, b)\big)$ sobre a superfície $z = f(x, y)$ existem pontos acima de P_0 e pontos abaixo de P_0, assim f tem um ponto de sela em (a, b).

(iv) Se $f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$ é necessário outro teste. A possibilidade de que $Q(0)$ seja igual a zero nos impede de tirar conclusões sobre o sinal de $Q(c)$.

EXEMPLO 06: Encontre os valores locais da função $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$.

SOLUÇÃO:

A função é definida e diferenciável para todo x e y e seu domínio não tem pontos de fronteira. Portanto a função tem valores extremos apenas nos pontos onde f_x e f_y são zero simultaneamente. Isso leva a

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \qquad\qquad f_y = x - 2y - 2 = 0,$$

ou

$$x = y = -2.$$

Portanto, o ponto $(-2, -2)$ é o único onde f pode ter um valor extremo. Para verificarmos se isso acontece, calculamos

$$f_x = -2, \qquad f_y = -2, \qquad f_{xy} = 1.$$

O discriminante de f em $(a, b) = (-2, -2)$ é

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 = 3.$$

A combinação

$$f_{xx} < 0 \qquad \text{e} \qquad f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 > 0$$

nos diz que f tem um máximo local em $(-2,-2)$. O valor de f nesse ponto é $f(-2,-2) = 8$.

EXEMPLO 07: Encontre os valores locais de $f(x,y) = xy$.

SOLUÇÃO:

Como f é diferenciável em toda parte pode assumir valores extremos apenas onde

$$f_x = y = 0 \qquad \text{e} \qquad f_y = x = 0.$$

Assim, a origem é o único ponto onde f pode ter um valor extremo. Para ver o que acontece lá, calculamos

$$f_{xx} = 0, \qquad f_{yy} = 0, \qquad f_{xy} = 1.$$

O discriminante

$$f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = -1,$$

é negativo. Portanto, a função tem um ponto de sela em $(0,0)$. Concluímos que $f(x,y) = xy$ não tem valores extremos locais.

EXEMPLO 08: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$$

SOLUÇÃO:

Como $f_x(x,y) = 6x - 2y$ e $f_y(x,y) = -2x + 2y - 8$, os pontos críticos de f satisfazem as equações

$$6x - 2y = 0$$

$$-2x + 2y - 8 = 0$$

Resolvendo-as para x e y, obtemos $x = 2$, $y = 6$, logo $(2,6)$ é o único ponto crítico. Para aplicar o Teorema $(4.5.2)$ (Teste da derivada segunda), precisamos das derivadas de segunda ordem

$$f_{xx}(x,y) = 6, \qquad f_{yy}(x,y) = 2, \qquad f_{xy}(x,y) = -2$$

No ponto $(2,6)$ temos

$$\Delta = f_{xx}(2,6)f_{yy}(2,6) - {f_{xy}}^2(2,6) = (6)(2) - (-2)^2 = 8 > 0$$

e

$$f_{xx}(2,6) = 6 > 0$$

logo f tem um mínimo relativo em $(2,6)$ pela parte (ii) do teste da derivada segunda. A figura 11 mostra o gráfico de f em uma vizinhança do mínimo relativo.

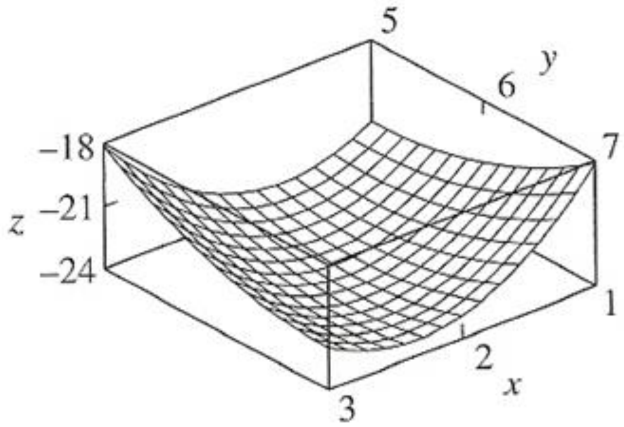


Figura 11

EXEMPLO 09: Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de

$$f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$$

SOLUÇÃO:

Como

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 4y - 4x^3 \\ f_y(x,y) &= 4x - 4y^3 \end{aligned} \qquad \textbf{(a)}$$

os pontos críticos de f têm coordenadas que satisfazem as equações

$$\begin{matrix} 4y - 4x^3 = 0 \\ 4x - 4y^3 = 0 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} y - x^3 = 0 \\ x - y^3 = 0 \end{matrix} \qquad (\mathbf{b})$$

Substituindo a equação de cima na equação de baixo obtemos $x - (x^3)^3$ ou, equivalentemente, $x^9 - x = 0$ ou $x(x^8 - 1) = 0$, a qual tem soluções $x = 0, x = 1, x = -1$. Substituindo esses valores na equação $(\mathbf{b})$ de cima, obtemos os valores y correspondentes $y = 0,\ y = 1,\ y = -1$. Assim, os pontos críticos de f são $(0,0)(1,1)$ e $(-1,-1)$.

De $(\mathbf{a})$

$$f_{xx}(x,y) = -12x^2, \qquad f_{yy}(x,y) = -12y^2, \qquad f_{xy}(x,y) = 4$$

e obtemos a seguinte tabela:

Ponto crítico (x_0, y_0)	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$f_{yy}(x_0, y_0)$	$f_{xy}(x_0, y_0)$	$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2$
$(0,0)$	0	0	4	-16
$(1,1)$	-12	-12	4	128
$(-1,-1)$	-12	-12	4	128

Nos pontos $(1,1)$ e $(-1,-1)$, temos $\Delta > 0$ e $f_{xx} < 0$, logo ocorrem máximos relativos nesses pontos críticos. Em $(0,0)$, há um ponto de sela, já que $\Delta < 0$. A superfície e um mapa de contorno estão mostrados nas figuras abaixo.

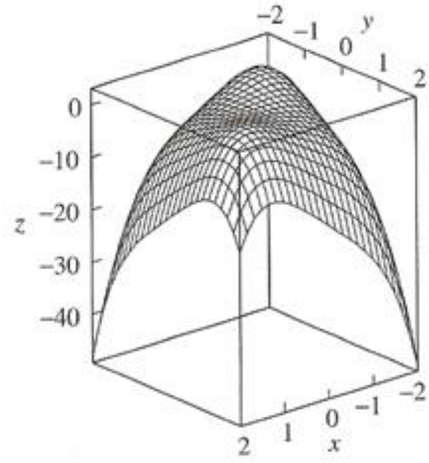


Figura 12

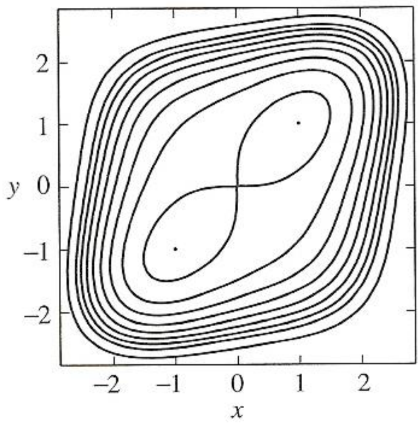


Figura 13

EXEMPLO 10: Consideremos a função $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$. Os pontos críticos de f são as soluções do sistema

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2y = 0 \\ f_y = -2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y \\ x = y \end{cases}$$

ou seja, os pontos críticos de f são todos os pontos da forma $(x, x), x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado,

$$f_{xx} = 2, \qquad f_{xy} = -2, \qquad f_{yy} = 2.$$

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - {f_{xy}}^2 = 0$$

Logo, o teorema é inconclusivo. Nesse caso, devemos analisar o comportamento de f nos pontos (x, x), usando a definição.

Temos

$$\begin{cases} f(x,y) = (x-y)^2 \geq 0 \ \ \forall \ x, y \\ f(x,y) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(x,y) \geq f(x,x) \ \ \forall \ x, y.$$

Logo, os pontos $(x, x), x \in \mathbb{R}$ são pontos de mínimo de f.

4.4 APLICAÇÃO PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

O Método dos Mínimos Quadrados é uma técnica de otimização matematica que procura encontrar o melhor ajustamento para um conjunto de dados tentando minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre a curva ajustada e os dados.

Consideremos n pontos em $\mathbb{R}^2$, não todos situados na mesma vertical e cujas coordenadas são: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

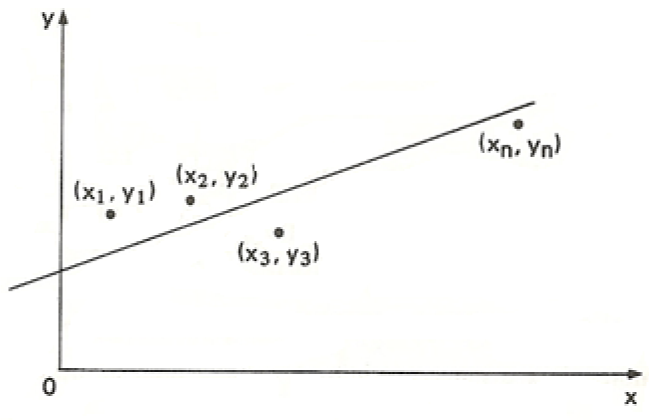


Figura 14

O problema consiste em encontrar uma reta que se ajuste a eles. Uma maneira frequentemente utilizada para se fazer isso é, através do *método dos mínimos quadrados*, em virtude das boas qualidades que possui.

O método consiste basicamente em encontrar uma reta entre as infinitas que existem, de equação $y = ax + b$, que tornará mínima a soma dos quadrados dos desvios $(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_n^2)$, onde $e_i = y_i - (ax_i + b)$. Tal reta é chamada de reta de *mínimos quadrados*, cuja equação irá determinar.

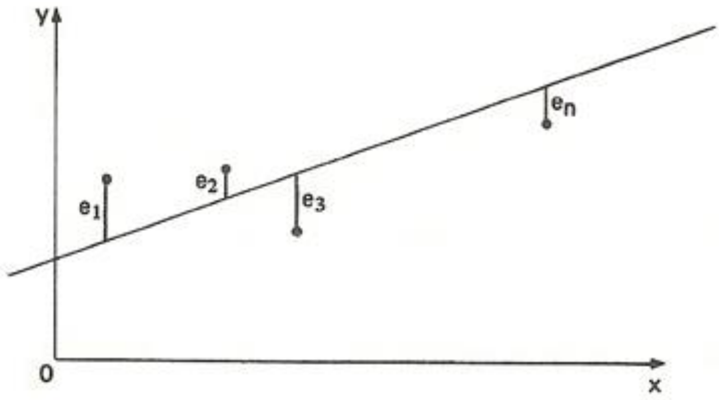


Figura 15

Temos:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Considerando a função de variáveis a e b dada por

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2,$$

nosso problema consiste em encontrar o par (a,b) que minimiza $f(a,b)$.

Omitiremos os índices do somatório, pois não há perigo de confusão. Os pontos críticos de f são obtidos resolvendo-se o sistema

$$\begin{cases} f_a = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ f_b = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} f_a = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i) = 0 \\ f_b = 2\sum(y_i - ax_i - b) \cdot (-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum x_i y_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0 \\ \sum y_i - a\sum x_i - nb = 0 \end{cases}$$

A solução de tal sistema é

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum x_i y_i - \dfrac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \dfrac{(\sum x_i)^2}{n}} \\ \text{e} \\ b = \dfrac{\sum y_i}{n} - a \cdot \dfrac{\sum x_i}{n} \end{cases}$$

Para provarmos que a solução encontrada é um ponto de mínimo, temos que calcular as derivadas de segunda ordem de f.

$$f_{aa} = 2\sum x_i^2; \qquad f_{ab} = 2\sum x_i; \qquad f_{ba} = 2\sum x_i; \qquad f_{bb} = 2n$$

O Hessiano de f no ponto crítico vale

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} 2\sum x_i^2 & 2\sum x_i \\ 2\sum x_i & 2n \end{vmatrix}$$

ou seja,

$$H(a,b) = 4n\sum x_i^2 - 4(\sum x_i)^2 = 4n\left[\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}\right]$$

e, portanto,

$$H(a,b) = 4n \cdot \sum (x_i - \bar{x})^2 \qquad \text{onde} \qquad \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Como $\sum (x_i - \bar{x})^2$ é uma soma de quadrados e os $x_{i's}$ não são todos iguais, segue-se que $H(a,b) > 0$.

Por outro lado, $f_{aa} = 2\sum x_i^2 > 0$ e assim concluímos que o ponto crítico obtido é de fato um ponto de mínimo de f.

Em resumo, a reta de mínimos quadrados tem por equação:

$$y = ax + b$$

onde

$$a = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n}} \qquad \mathbf{(4.4.1)}$$

$$b = \frac{\sum y_i}{n} - a \cdot \frac{\sum x_i}{n} \qquad \mathbf{(4.4.2)}$$

EXEMPLO 11: Um monopolista deseja obter empiricamente uma equação de demanda para seu produto. Ele admite que a quantidade média demandada (y) se relaciona com seu preço unitário (x) através de uma função do 1.º grau $(y = \alpha x + \beta)$.

Para estimar esta reta, fixou os preços em vários níveis e observou a quantidade demandada, obtendo os dados a seguir.

Preço unitário (x)	Quantidade Demandada (y)
1	10
2	8
3	5
4	3

Qual a equação da reta de mínimos quadrados? Inicialmente, vamos escrever a seguinte tabela de dados

x	y	xy	x^2
1	10	10	1
2	8	16	4
3	5	15	9
4	3	12	16
∑10	26	53	30

Seja $y = \alpha x + \beta$ a equação da reta de mínimos quadrados. Temos usando as definições (5.1) e (5.2),

$$\alpha = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{53 - \frac{(10)(26)}{4}}{30 - \frac{(10)^2}{4}} = -2{,}4$$

$$\beta = \frac{\sum y}{n} - \alpha \cdot \frac{\sum x}{n} = \frac{26}{4} + 2{,}4 \cdot \frac{10}{4} = 12{,}5$$

Portanto a equação da reta procurada é $y = 12{,}5 - 2{,}4x$, cujo gráfico é:

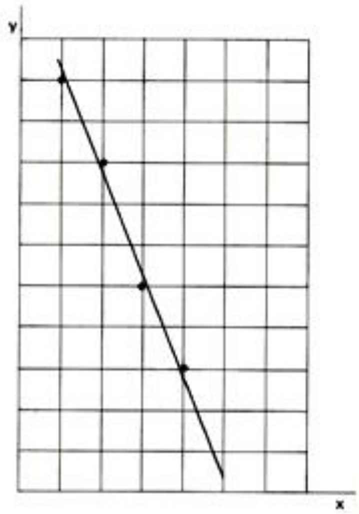


Figura 16

EXEMPLO 12: Ajuste uma reta de mínimos quadrados $y = ax + b$ aos pontos

x	y
2	7
4	10
6	11

SOLUÇÃO:

Primeiro vamos montar a tabela de dados:

x	y	xy	x^2
2	7	14	4
4	10	40	16
6	11	66	36
$\sum 12$	28	120	56

Sendo $y = ax + b$ a equação da reta de mínimos quadrados. Usamos as definições,

$$a = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{120 - \frac{(12)(28)}{3}}{56 - \frac{(12)^2}{3}} = 1$$

$$b = \frac{\sum y}{n} - a \cdot \frac{\sum x}{n} = \frac{28}{3} - 1 \cdot \frac{12}{3} = \frac{16}{3}$$

Portanto a equação da reta procurada é $y = x + \frac{16}{3}$.

EXEMPLO 13: A tabela a seguir fornece as quantidades de fertilizantes aplicados (x) e a produção por hectare (y) em quatro canteiros de uma fazenda experimental.

x	y
2	20
4	35
6	55
8	85

(a) Supondo que y se relaciona com x sob a forma $y = \alpha x + \beta$, estime esta reta pelo método dos mínimos quadrados.

(b) Preveja a produção para uma aplicação de fertilizante correspondente a $x = 7$.

Solução:

(a) Para estimar a reta é necessário montar a tabela de dados:

x	y	xy	x^2
2	20	40	4
4	35	140	16
6	55	330	36
8	85	680	64
$\sum$20	195	1190	120

Sendo $y = \alpha x + \beta$ a equação da reta de mínimos quadrados. Usamos as definições,

$$\alpha = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{1190 - \frac{(20)(195)}{4}}{120 - \frac{(20)^2}{4}} = 10{,}75$$

$$\beta = \frac{\sum y}{n} - \alpha \cdot \frac{\sum x}{n} = \frac{195}{4} - 10{,}75 \cdot \frac{20}{4} = -5$$

Portanto a equação da reta procurada é $y = 10{,}75x - 5$.

(b) Agora que já temos a expressão que determina a relação entre x e y, podemos prever a produção para uma aplicação de fertilizante quando $x = 7$

$$y = 10{,}75x - 5 \Longrightarrow y = 70{,}25$$

EXEMPLO 14: As vendas de um determinado produto durante 1980 foram:

x	y
jan.	15
fev.	18
mar.	12
abr.	16
maio	23
jun.	17
jul.	20
ago.	20
set.	18
out.	13
nov.	15
dez.	12

(a) Supondo que o modelo adequado para relacionar y e t seja $y = at + b$, estime esta reta pelo método dos mínimos quadrados.

(b) Preveja qual será a venda em janeiro e fevereiro de 1981.

SOLUÇÃO:

(a) Vamos montar a tabela de dados:

x	y	xy	x^2
1	15	15	1
2	18	36	4
3	12	36	9
4	16	64	16
5	23	115	25
6	17	102	36
7	20	140	49
8	20	160	64
9	18	162	81
10	13	130	100
11	15	165	121
12	12	144	144
$\sum 78$	199	1269	650

onde $t = 1$ para janeiro de 1981, $t = 2$ para fevereiro de 1981, $t = 3$ para março de 1981 e assim sucessivamente até $t = 12$ para dezembro de 1981.

Seja $y = at + b$ a equação da reta de mínimos quadrados. Usamos as definições,

$$a = \frac{\sum xy - \frac{(\sum x)(\sum y)}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} = \frac{1269 - \frac{(78)(199)}{12}}{650 - \frac{(78)^2}{12}} = -0{,}17$$

$$b = \frac{\sum y}{n} - a \cdot \frac{\sum x}{n} = \frac{199}{12} + 0{,}17 \cdot \frac{78}{12} = 17{,}69$$

Portanto a equação da reta estimada é $y = -0{,}175t + 17{,}69$.

(b) Dada a lei de formação da reta é possível prever a venda em janeiro e fevereiro de 1981, onde $t = 13$ para janeiro de 1981 e $t = 14$ para fevereiro de 1981. Temos:

$$\text{para: t} = 13 \Longrightarrow y = -0{,}175t + 17{,}69 \qquad \therefore y = 15{,}48$$

$$\text{para : t} = 14 \Longrightarrow y = -0{,}175t + 17{,}69 \qquad \therefore y = 15{,}31$$

A técnica dos mínimos quadrados é comumente usada em ajuste de curvas. Muitos outros problemas de otimização podem também ser expressos na forma dos mínimos quadrados, por minimização (energia) ou maximização (entropia)

4.5 PONTOS DE FRONTEIRA

Até agora, vimos como encontrar máximos e mínimos de funções analisando apenas os pontos interiores do domínio. A análise dos pontos de fronteira (quando existem) terá que ser feita sem o auxílio de teoremas vistos anteriormente em mínimos quadrados. Conforme veremos uma das formas usadas para abordar tais situações é através das curvas de nível da função a ser otimizada. Os exemplos esclarecerão esse tipo de abordagem.

EXEMPLO 15: Consideremos a função f dada por $f(x,y) = 2x + y$, e o domínio D determinado pelas inequações

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 7 \end{cases}$$

(a) Notemos que o conjunto D é constituído pela reunião do triângulo abaixo, com sua parte interna.

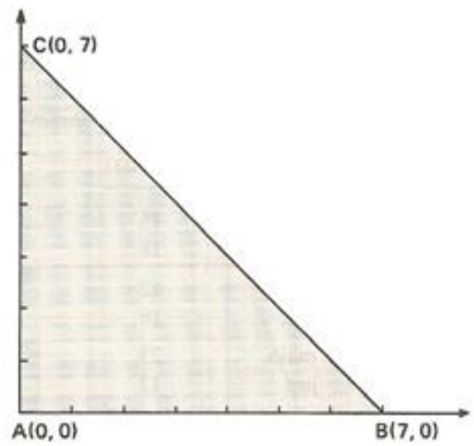
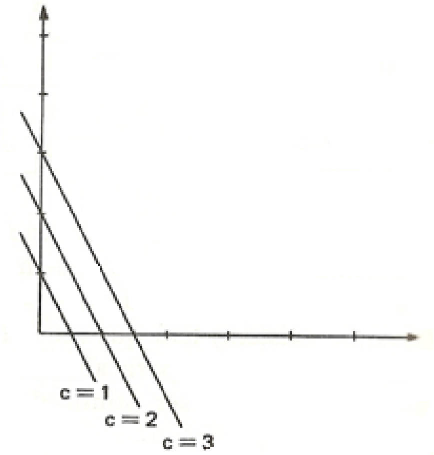


Figura 17

A fronteira do conjunto D é formada pelos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$.

(b) A função $f(x, y) = 2x + y$ admite como curvas de nível o feixe de paralelas à reta $2x + y = 0$, pois qualquer curva de nível C tem por equação a reta $2x + y = C$ que é paralela à $2x + y = 0$ qualquer que seja C. Eis algumas curvas de nível e os seus gráficos:



$C = 1 \Longrightarrow 2x + y = 1,$

$C = 2 \Longrightarrow 2x + y = 2,$

$C = 3 \Longrightarrow 2x + y = 3$

Figura 18

Nota-se que, quanto mais a reta se distancia da origem, maior é o valor de C.

(c) Como todos os pontos (x, y) da curva de nível C produzem um valor constante para $f(x, y)$, o ponto da curva de *maior nível* que intercepta D é o *ponto de máximo* de f, neste caso, $B(7,0)$. A curva de *menor nível* que intercepta D é o *ponto de mínimo* de f, no caso, $A(0,0)$.

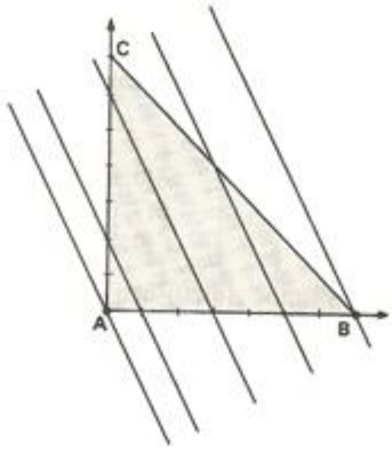


Figura 19

(d) O ponto $(0,0)$ é o *ponto de mínimo absoluto* e $(7,0)$ é o *ponto de máximo absoluto* de f.

(e) Entre os pontos interiores a D, não existe ponto de máximo ou de mínimo pois $f_x = 2$ e $f_y = 1$.

OBSERVAÇÕES:

(i) Se duas retas têm *coeficientes angulares negativos*, a mais inclinada em relação ao eixo x é aquela cujo coeficiente angular é maior. Assim, neste exemplo, o coeficiente angular α_1 da reta $\overleftrightarrow{BC}$ é igual a -1 e o coeficiente angular do feixe de paralelas é $\alpha_2 = -2$ e, portanto, $\overleftrightarrow{BC}$ tem maior inclinação.

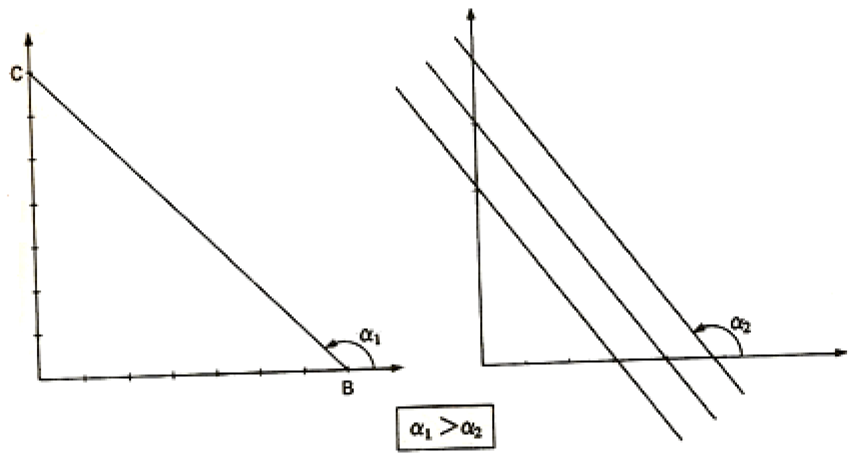


Figura 20

(ii) Neste exemplo é intuitivo perceber que os pontos de máximo e de mínimo estão nos vértices do triângulo. Assim, uma simples inspeção do valor de f nos pontos A, B e C, nos permite descobrir os pontos de máximo e mínimo.

De fato,

$$f(x,y) = 2x + y$$

$$A(0,0) \Rightarrow f(0,0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$B(7,0) \Rightarrow f(7,0) = 2 \cdot 7 + 0 = 14$$

$$C(0,7) \Rightarrow f(0,7) = 2 \cdot 0 + 7 = 7$$

e , portanto, $A(0,0)$ é o ponto de mínimo e $B(7,0)$ é o de máximo.

EXEMPLO 16: Consideremos a função dada por $f(x, y) = x + y$ e o domínio D determinado pelas inequações

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$$

(a) O conjunto D é constituído pelos pontos da região indicada na Figura 4.

$A(0,0)$

$B(3,0)$

$C(0,3)$

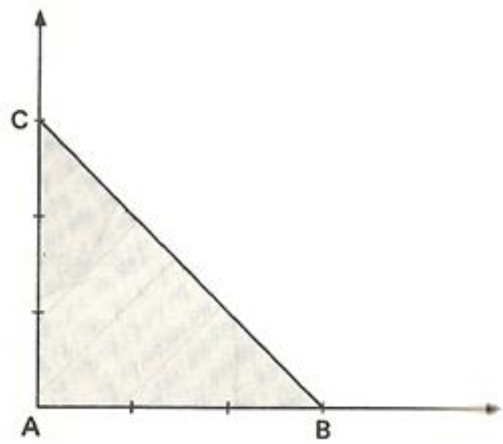


Figura 21

(b) A função objetivo $f(x, y) = x + y$ admite como curvas de nível o feixe de paralelas à reta $x + y = 0$.

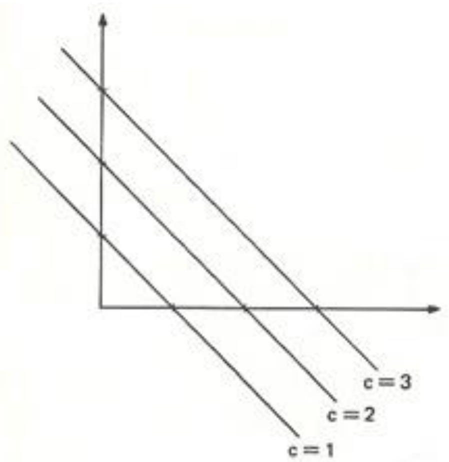


Figura 22

(c) Todos os pontos do segmento $\overline{BC}$ são pontos de máximo pois a reta $\overleftrightarrow{BC}$ tem mesmo coeficiente angular que o do feixe de paralelas (-1). O ponto de mínimo de f é o ponto $A(0,0)$.

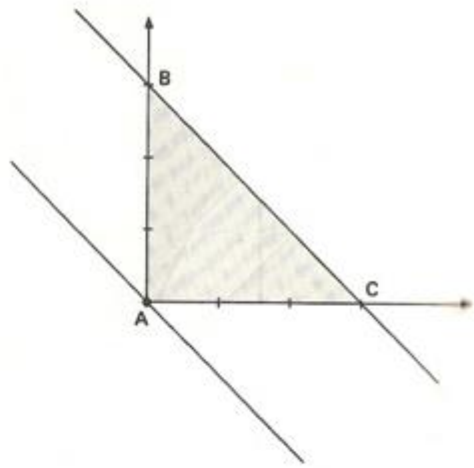


Figura 23

4.6 EXTREMOS ABSOLUTOS

Assim como é possível determinar a montanha mais alta e o vale mais profundo de uma cadeia de montanhas, também é possível determinar o maior e o menor valor de $f(x,y)$ sobre o domínio inteiro de f.

Se f tem um máximo ou mínimo absoluto em (x_0, y_0), dizemos que f tem um *extremo absoluto* ou *extremo global* em (x_0, y_0).

4.6.1 DEFINIÇÃO: Uma função f de duas variáveis tem um *valor máximo absoluto ou máximo global* $f(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) de seu domínio D se $f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$ para todo ponto (x,y) em D.

4.6.2 DEFINIÇÃO: Uma função f de duas variáveis tem um *valor mínimo absoluto ou mínimo global* $f(x_0, y_0)$ no ponto (x_0, y_0) de seu domínio D se $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ para todo ponto (x, y) em D.

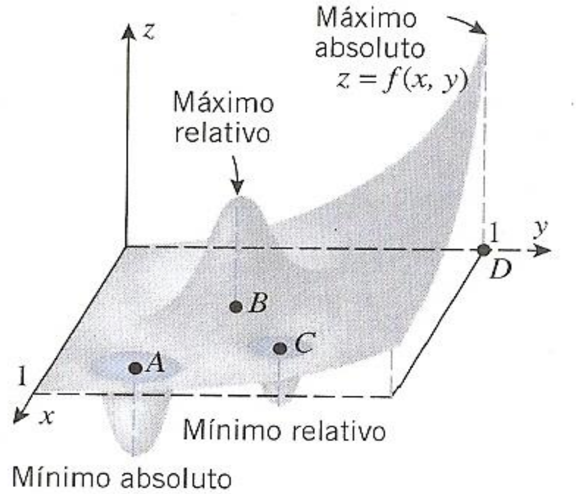


Figura 24

A figura 24 mostra o gráfico de uma função f cujo domínio é a região quadrada fechada no plano xy dos pontos que satisfazem as desigualdades $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e que tem mínimos relativos nos pontos A e C, um máximo relativo em B, um mínimo absoluto em A e um máximo absoluto em D.

O teorema a seguir indica a existência dos extremos absolutos.

4.6.3 TEOREMA DO VALOR EXTREMO: Seja f uma função de duas variáveis cujo domínio D não apenas seja limitado, mas também contenha todos os pontos de sua própria fronteira. Então f tem um valor máximo e um valor mínimo absoluto.

Se qualquer uma das condições do Teorema do Valor Extremo deixar de ser válida, não haverá nenhuma garantia de que exista um máximo ou mínimo absoluto na região R. Assim, uma função descontínua num conjunto fechado e limitado não precisa ter extremo absoluto, e uma função contínua num conjunto que não é fechado ou limitado tampouco precisa ter algum extremo absoluto.

4.6.4 TEOREMA: Se uma função f de duas variáveis tem um extremo absoluto (um máximo ou um mínimo absolutos) em um ponto interior de seu domínio, então este extremo ocorre em um ponto crítico.

DEMOSTRAÇÃO:

Se f tiver um máximo absoluto no ponto (x_0, y_0) do interior do domínio de f, então f tem um máximo relativo em (x_0, y_0). Se ambas as derivadas parciais existirem em (x_0, y_0), então

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \text{ e } f_y(x_0, y_0) = 0$$

Pelo **Teorema 4.2.3**, logo (x_0, y_0) é um ponto crítico de f. Se uma das duas derivadas parciais não existir, então de novo (x_0, y_0) é um ponto crítico, logo (x_0, y_0) é um ponto crítico de todos os casos. A prova para mínimo absoluto é análoga.

Para encontrarmos os extremos absolutos de uma função contínua $f(x, y)$ em uma região fechada e limitada, seguimos três passos:

Passo 1: *Relacionamos os pontos interiores* de R onde f possa ter máximos e mínimos locais e calculamos f nesses pontos. Esses são os pontos nos quais $f_x = f_y = 0$ ou onde uma ou ambas as derivadas parciais f_x e f_y deixam de existir (pontos críticos de f).

Passo 2: *Relacionamos os pontos da fronteira* de R onde f tem máximos e mínimos locais e calculamos f nesses pontos.

Passo 3: *Procuramos na relação* pelos valores máximo e mínimo de f. Estes serão os valores máximo e mínimo absolutos (ou globais) de f em R. Como máximos e mínimos globais são também máximos e mínimos locais, os primeiros aparecem em algum lugar das relações construídas nos passos 1 e 2.

EXEMPLO 17: Encontre o máximo e o mínimo global de $f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$ na região tiangular no primeiro quadrante limitada pelas retas $x = 0, y = 0, y = 9 - x$.

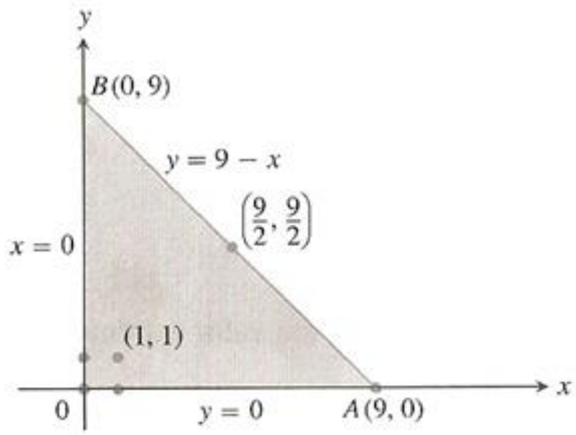


Figura 25: Esta placa triangular é o domínio da função.

SOLUÇÃO:

Como f é diferenciável, os únicos lugares nos quais f pode assumir esses valores são pontos no interior do triangulo onde $f_x = f_y = 0$ e pontos na fronteira.

Pontos interiores:

Para estes, temos

$$f_x = 2 - 2x = 0, \qquad f_y = 2 - 2y = 0,$$

resultando no único ponto $(x, y) = (1,1)$. O valor de f lá é $f(1,1) = 4$

Pontos de fronteira:

Consideramos um lado do triângulo de cada vez.

1. No segmento OA, $y = 0$. A função

$$f(x, y) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$$

pode ser agora considerada uma função de x definida no intervalo fechado $0 \leq x \leq 9$. Seus valores extremos podem ocorrer nas extremidades

$x = 0$ onde $f(0,0) = 2$

$x = 0$ onde $f(9,0) = 2 + 18 - 81 = -61$

e nos pontos interiores onde $f'(x, 0) = 2 - 2x = 0$. O único ponto interior $f'(x, 0) = 0$ é $x = 1$, onde

$$f(x, 0) = f(1,0) = 3.$$

2. No segmento OB, $x = 0$ e

$$f(x, y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2.$$

Sabemos pela simetria de f em x e y e a partir da análise que acabamos de fazer que os candidatos neste segmento são

$$f(0,0) = 2, \qquad f(0,9) = -61, \qquad f(0,1) = 3.$$

3. Já levamos em consideração os valores de f nos extremos de AB, assim precisamos somente examinar os pontos interiores de AB. Com $y = 9 - x$, temos

$$f(x, y) = 2 + 2x + 2(9 - x) - x^2 - (9 - x)^2 = -61 + 18x - 2x^2.$$

Fazendo $f'(x, 9 - x) = 18 - 4x = 0$ resulta

$$x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Nesse valor de x,

$$y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{e} \quad f(x, y) = f\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) = -\frac{41}{2}.$$

Relacionamos todos os candidatos: $4, 2, -61, 3, -(41/2)$. O máximo é 4, o qual f assume em $(1,1)$. O mínimo é -61, o qual f assume em (0,9) e (9,0).

EXEMPLO 18: Encontre os valores máximo e mínimo absolutos de

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \qquad (\mathbf{1})$$

na região triangular fechada R de vértices $(0,0), (3,0)\ e\ (0,5)$.

SOLUÇÃO:

A região R mostrada na figura 26

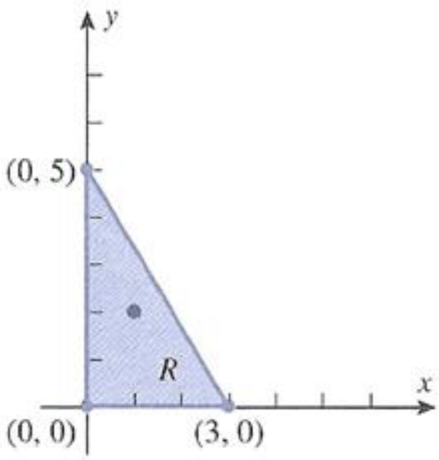


Figura 26

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 6 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3$$

logo, todos os pontos críticos ocorrem onde

$$3y - 6 = 0 \qquad \text{e} \qquad 3x - 3 = 0$$

Resolvendo essas equações, resultam x =1 e $x = 2$, logo (1,2) é o único ponto crítico. Conforme mostrado na figura 26, esse ponto crítico está no interior de R.

Em seguida, queremos determinar as localizações dos pontos sobre a fronteira de R nos quais pode ocorrer um valor extremo. A fronteira de R consiste em três segmentos de retas, cada um dos quais trataremos separadamente:

O segmento de reta entre $(0,0)$ e $(3,0)$: Nesse segmento de reta, temos $y = 0$, logo $(\mathbf{1})$ simplifica para uma função de única variável x,

$$u(x) = f(x, 0) = -6x + 7, \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Essa função não tem ponto crítico, pois $u'(x) = -6$ é não-nula para todo x. Assim, os valores extremos de $u(x)$ ocorrem nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$, que correspondem aos pontos $(0,0)$ e $(3,0)$ de R.

O segmento de reta entre $(0,0)$ e $(0,5)$: Nesse segmento de reta, temos $x = 0$, logo $(\mathbf{1})$ simplifica para uma função de única variável y,

$$v(y) = f(0, y) = -6y + 7, \qquad 0 \leq y \leq 5$$

Essa função não tem pontos críticos, pois $v'(y) = -3$ é não-nula para todo y. Assim, os valores extremos de $v(y)$ ocorrem nos pontos extremos $y = 0$ e $y = 5$, que correspondem aos pontos $(0,0)$ e $(0,5)$ de R.

O segmento de reta entre $(3,0)$ e $(0,5)$: No plano xy, uma equação para esse segmento é.

$$y = -\frac{5}{3} + 5, \qquad 0 \leq x \leq 3 \qquad (\mathbf{2})$$

logo (3) simplifica para uma função de uma única variável x,

$$w(x) = f\left(x, -\frac{5}{3}x + 5\right) = 3x\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) - 6x - 3\left(-\frac{5}{3}x + 5\right) + 7$$

$$= -5x^2 + 14x - 8, \qquad 0 \leq x \leq 3$$

Uma vez que $w'(x) = -10x + 14$, a equação $w'(x) = 0$ fornece $x = \frac{7}{5}$ como único ponto crítico de w. Assim, os valores extremos de w ocorrem ou no ponto crítico $x = \frac{7}{5}$ ou nos pontos extremos $x = 0$ e $x = 3$. Os pontos extremos correspondem aos pontos $(0,5)$ e $(3,0)$ de R, e, por $(\mathbf{2})$, o ponto crítico corresponde a $\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$.

Finalmente, a tabela abaixo lista os valores de $f(x, y)$ no ponto crítico interior e nos pontos de fronteira nos quais pode ocorrer um extremo absoluto.

(x, y)	$(0,0)$	$(3,0)$	$(0,5)$	$\left(\frac{7}{5}, \frac{8}{3}\right)$	$(1,2)$
$f(x, y)$	7	-11	-8	$\frac{9}{5}$	1

Da tabela concluímos que o valor máximo absoluto de f é $f(0,0) = 7$ e o valor mínimo é $f(3,0) = -11$.

4.7 PROBLEMAS PRÁTICOS DE MÁXIMOS E MÍNIMOS ABSOLUTOS

EXEMPLO 19: Uma empresa de entregas aceita apenas caixas retangulares cujos comprimentos e perímetros da seção transversal não ultrapassem 108 pol. Encontre as dimensões de uma caixa aceitável de maior volume possível.

SOLUÇÃO:

Sejam x, y e z o comprimento, a largura e a altura da caixa retangular, respectivamente. Então o perímetro da seção transversal é $2y + 2z$. Queremos maximizar o volume $V = xyz$ da caixa satisfazendo $x + 2y + 2z = 108$ (a maior caixa de entregas aceita pela empresa). Assim, podemos escrever o volume da caixa como uma função de duas variáveis.

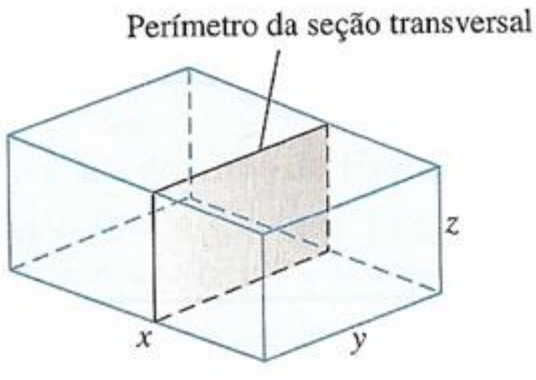


Figura 27

Sendo $V = xyz$ e $x = 108 - 2y - 2z$. Temos:

$$V(x, y) = (108 - 2y - 2z)yz = 108yz - 2y^2z - 2yz^2$$

Fazendo as derivadas parciais de primeira ordem iguais a zero,

$$V_y(x, y) = 108z - 4yz - 2z^2 = (108 - 4y - 2z)z = 0$$

$$V_z(x,y) = 108y - 2y^2 - 4yz = (108 - 2y - 4z)y = 0,$$

Temos os pontos crítico $(0,0), (0,54), (54,0)$ e $(18,18)$. O volume é zero em $(0,0), (0,54), (54,0)$, os quais não são os valores máximos. No ponto $(18,18)$, aplicamos o teste da derivada segunda (Teorema 4.5.2):

$$V_{yy} = -4z, \qquad V_{zz} = -4y, \qquad V_{yz} = 108 - 4y - 4z.$$

Então,

$$V_{yy}V_{zz} - {V_{yz}}^2 = 16yz - 16(27 - y - z)^2.$$

Portanto,

$$V_{yy}(18,18) = -4(18) < 0$$

e

$$\left[V_{yy}V_{zz} - {V_{yz}}^2\right]_{(18,18)} = 16(18)(18) - 16(-9)^2 > 0$$

implica que $(18,18)$ fornece um volume máximo. As dimensões da caixa são $x = 108 - 2(18) - 2(18) = 36$ pol, $y = 18$ pol e $z = 18$ pol. O volume máximo é $V = (36)(18)(18) = 11.664$ pol^3.

EXEMPLO 20: Determine as dimensões de uma caixa retangular aberta no topo, com um volume de 32 pés^3 e cuja construção requeira uma quantidade mínima de material.

SOLUÇÃO:

Sejam

$x =$ comprimento da caixa (em pés)

$y =$ largura da caixa (em pés)

$z =$ altura da caixa (em pés)

$S =$ área da superfície da caixa (em pés ao quadrado)

É razoável supor que a caixa com a área mínima de superfície necessite de uma quantidade mínima do material, logo nosso objetivo é minimizar a área de superfície

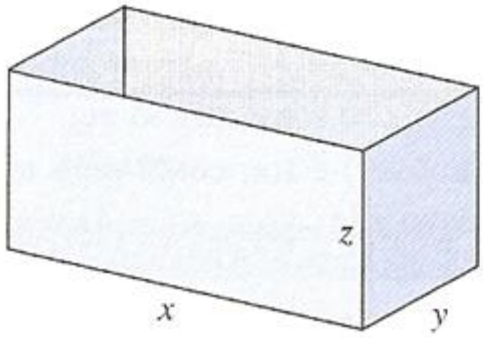


Figura 28

$$S = xy + 2xz + 2yz \qquad (\mathbf{1})$$

A figura acima é sujeita à restrição de volume

$$xyz = 32 \qquad (\mathbf{2})$$

De $(\mathbf{2})$ obtemos $z = 32/xy$, logo $(\mathbf{2})$ pode ser escrita como

$$S = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x} \qquad (\mathbf{3})$$

que expressa S como uma função de duas variáveis. As dimensões x e y nessa fórmula, devem ser positivas mas, fora isso, não têm outras limitações, portanto nosso problema é determinar o valor mínimo absoluto de S no primeiro quadrante: $x > 0$, $y > 0$.

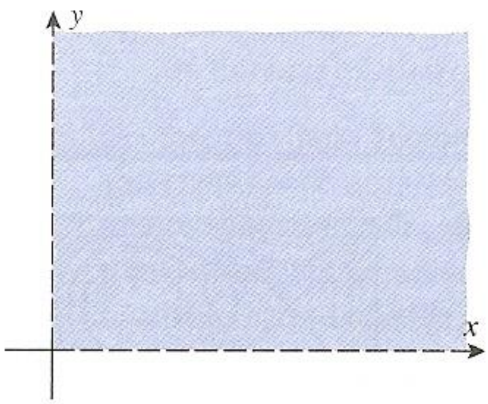


Figura 29

Como essa região não é limitada nem fechada, não temos garantia matemática alguma nesse estágio de que exista um valor mínimo absoluto. Contudo, S terá um valor grande em qualquer ponto (x, y) do primeiro quadrante para o qual o produto xy seja grande ou para o qual x ou y estejam perto de 0. Podemos usar essa observação para provar a existência de um mínimo absoluto em S.

Seja R a região do primeiro quadrante definida pelas desigualdades

$$\frac{1}{2} \leq x, \qquad \frac{1}{2} \leq y, \qquad \text{e} \qquad xy \leq 128$$

Essa região é fechada e limitada e a função S é contínua em R. Segue do Teorema 4.4.3 (Teorema do valor externo) que S tem um mínimo absoluto em R. Além disso, observe que $S > 128$ em qualquer ponto (x, y) fora de R e que o ponto (8,8) pertence a R, com $S = 80 < 128$ nesse pomto. Concluímos que o valor mínimo de S em R é, também, o valor de S no primeiro quadrante inteiro.

Como S tem um valor mínimo absoluto no primeiro quadrante, esse valor deve ocorrer num ponto crítico de S. Derivando S obtemos

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}, \tag{4}$$

logo, as coordenadas dos pontos críticos de S satisfazem

$$y - \frac{64}{x^2} = 0, \qquad x - \frac{64}{y^2} = 0$$

Resolvendo a primeira equação para y resulta em

$$y = \frac{64}{x^2} \tag{5}$$

e substituindo essa expressão na segunda equação, obtemos

$$x - \frac{64}{(64/x^2)^2} = 0$$

a equação pode ser reescrita como

$$x\left(1-\frac{x^3}{64}\right)=0$$

As soluções dessa equação são $x = 0$ e $x = 4$. Uma vez que queremos $x > 0$, a única solução signifiicante é $x = 4$. Substituindo este valor em (**5**), obtemos $y = 4$. Substituindo $x = 4$ e $y = 4$ em (**2**), obtemos $z = 2$, logo a caixa que usa o mínimo material tem uma altura de 2 pés e uma base quadrada cujas arestas tem comprimento 4 pés.

EXEMPLO 21: Uma placa metálica circular com 1 metro de raio está clocada com seu centro na origem de um plano xy e é aquecida de modo que a temperatura no ponto (x, y) é dada por $T = 64(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2y + 5)$ graus C, onde x e y estão em metros. Encontre a maior e a menor temperatura na placa.

SOLUÇÃO:

Desde que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 64(6x - 2y) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = 64(-2x + 6y + 2),$$

os pontos críticos dentro do disco circular são encontrados resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} 64(6x - 2y) = 0 \\ 64(-2x + 6y + 2) = 0. \end{cases}$$

A única solução $x = -1/8$, $y = -3/8$ fornece exatamente um ponto crítico sobre a placa, a saber $(-1/8, -3/8)$. Para o teste da derivada segunda em $(-1/8, -3/8)$, precisamos dos valores

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = (64)(6), \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} = (64)(-2), \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = (64)(6).$$

Desse modo, no ponto crítico

$$\Delta = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}\right)^2 = (384)(384) - (-128)^2 = 131.072 > 0,$$

e $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 384 + 384 = 768 > 0$; daí, há uma temperatura mínima relativa de

$64\left[3\left(-\frac{1}{8}\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{8}\right)\left(-\frac{3}{8}\right) + 3\left(-\frac{3}{8}\right)^2 + 2\left(-\frac{3}{8}\right) + 5\right] = 296$ graus C no ponto $(-1/8, -3/8)$.

Nesse caso, precisamos examinar os valores de T ao longo da fronteira $x^2 + y^2 = 1$ da placa circular. Se fizermos

$$\begin{cases} x = cos\,\theta \\ y = sen\,\theta, \end{cases}$$

então, como θ varia de 0 a 2π, o ponto (x, y) percorre a fronteira da placa. A temperatura no ponto correspondente a θ é dada por

$$T = 64(3\,cos^2\,\theta - 2\,cos\,\theta\,sen\,\theta + 3\,sen^2\,\theta + 2\,sen\,\theta + 5)$$

$$= 64(3 - 2\,cos\,\theta\,sen\,\theta + 2\,sen\,\theta + 5) = 64(8 - 2\,cos\,\theta\,sen\,\theta + 2\,sen\,\theta)$$

$$= 128(4 - cos\,\theta\,sen\,\theta + sen\,\theta).$$

Desse modo, sobre a fronteira da placa,

$$\frac{dT}{d\theta} = 128(sen^2\,\theta - cos^2\,\theta + cos\,\theta) = 128(1 - 2\,cos\,\theta + cos\,\theta).$$

Os valores críticos de θ sobre a fronteira são as soluções de

$$1 - 2\,cos^2\,\theta + cos\,\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2\,cos^2\,\theta - cos\,\theta - 1 = 0;$$

isto é,

$$(2\,cos\,\theta + 1)(cos\,\theta - 1) = 0.$$

Assim $cos\,\theta = -1/2$ ou $cos\,\theta = 1$, logo os valores críticos de θ são

$$\theta = \frac{2\pi}{3}, \qquad \theta = \frac{4\pi}{3}, \qquad \theta = 0.$$

Quando $\theta = 2\pi/3$, temos

$$T = 128\left(4 - cos\,\frac{2\pi}{3}\,sen\,\frac{2\pi}{3} + sen\,\frac{2\pi}{3}\right) = 32\left(16 + 3\sqrt{3}\right) \approx 678{,}28 \text{ graus } C.$$

Quando $\theta = 4\pi/3$, temos

$$T = 128\left(4 - cos\,\frac{4\pi}{3}\,sen\,\frac{4\pi}{3} + sen\,\frac{4\pi}{3}\right) = 32\left(16 - 3\sqrt{3}\right) \approx 345{,}72 \text{ graus } C.$$

Quando $\theta = 0$, temos

$$T = 128(4 - cos\, 0\, sen\, 0 + sen\, 0) = 512 \text{ graus } C.$$

Sobre a fronteira da placa, a máxima temperatura é portanto $32\left(16 + 3\sqrt{3}\right) \approx 678{,}28$ graus C e a temperatura mínima é $32\left(16 - 3\sqrt{3}\right) \approx 345{,}72$ graus C. A temperatura mínima relativa de 296 graus C no interior da placa é menor do que a mínima da fronteira; daí, ela é temperatura mínima absoluta sobre a placa. Portanto a temperatura mínima absoluta sobre a placa é de 296 graus C e a temperatura máxima absoluta é de $32\left(16 + 3\sqrt{3}\right) \approx 678{,}28$ graus C.

Em problemas aplicados é comum os extremos absolutos procurados requererem um tratamento rigoroso e uma análise exaustiva, contudo há situações em que através da intuição física ou geométrica podemos desenvolver uma análise informal envolvendo apenas um exame dos pontos críticos interiores, como no exemplo que segue.

EXEMPLO 22: De uma folha de flandes com $12\ cm$ de largura deseja-se obter uma calha dobrando-se as bordas da folha de iguais quantidades de modo que as abas façam o mesmo ângulo com a horizontal. Qual a largura das abas e qual o ângulo que devem fazer a fim, de ter uma capacidade máxima?

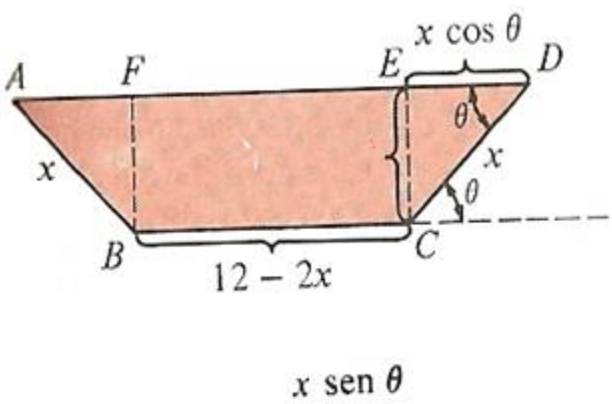


Figura 30

SOLUÇÃO:

A figura 4 mostra uma seção transversal de calha, onde x representa a largura das abas e θ o ângulo que as mesmas fazem com a horizontal. Precisamos maximizar a área z da seção transversal. Desde que os triângulos ABF e ECD têm ${}^{1}\!/_{2}\,(x\cos\theta)(x\, sen\,\theta)$ centímetros quadrados de área cada um e o retângulo BCEF tem área de $x\, sen\,\theta\,(12-2x)$ centímetros quadrados, segue que

$$z = x^2 \cos\theta \sin\theta + x\sin\theta(12-2x) \text{ centímetros quadrados.}$$

Aqui,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin\theta[x(2\cos\theta - 4) + 12],$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = x[x(2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) + 12\cos\theta].$$

Daí, os pontos críticos correspondentes às soluções do sistema de equações

$$\begin{cases} x(2\cos\theta - 4) + 12 = 0 \\ x(2\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1) + 12\cos\theta = 0. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação para $\cos\theta$, obtemos

$$\cos\theta = 2 - \frac{6}{x}.$$

Substituindo este valor de $\cos\theta$ na segunda equação, temos

$$x\left[2\left(4 - \frac{24}{x} + \frac{36}{x^2}\right) - \left(4 - \frac{12}{x}\right) - 1\right] + 24 - \frac{72}{x} = 0 \quad \text{ou} \quad 3x - 12 = 0.$$

Daí, $x = 4$ e $\cos\theta = 2 - {}^{6}\!/_{4} = {}^{1}\!/_{2}$. O ponto crítico é dado por

$$x = 4 \text{ polegadas e } \theta = 60°.$$

A solução $x = 4$ polegadas, $\theta = 60°$, neste problema parece tão razoável, geometricamente falando, que nem precisamos utilizar o teste da derivada segunda para um máximo relativo.

EXEMPLO 23: Deseja-se construir uma caixa, sem tampa, com a forma de um paralelepípedo-retângulo e com 1 m^3 de volume. O material a ser utilizado nas laterais custa o triplo do que será utilizado no fundo. Determine as dimensões da caixa que miinimiza o custo do material.

SOLUÇÃO:

Sendo $abc = 1$ ou $c = \frac{1}{ab}$.

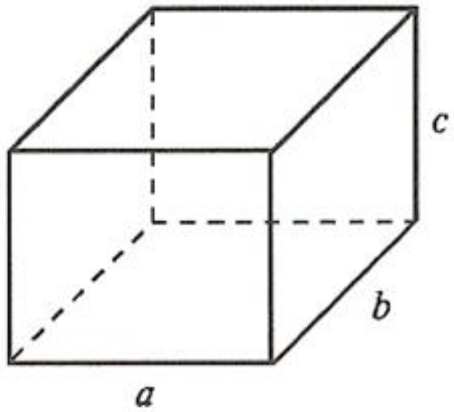


Figura 31

O problema consiste em minimizar

$$f(a,b) = 3(2ac + 2bc) + ab, \qquad \text{onde} \qquad c = \frac{1}{ab},$$

ou

$$f(a,b) = \frac{6}{b} + \frac{6}{a} + ab, \qquad a > 0 \quad \text{e} \quad b > 0$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{6}{a^2} + b \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial b} = -\frac{6}{b^2} + a.$$

$$\begin{cases} -\dfrac{6}{a^2} + b = 0 \\ -\dfrac{6}{b^2} + a = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2 b = 6 \\ b^2 a = 6 \end{cases}$$

$$a^2 b = ab^2 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$$

Assim, $a, b = \left(\sqrt[3]{6}, \sqrt[3]{6}\right)$ é ponto de mínimo local. Pela natureza do problema, é razoável esperar que este ponto seja de mínimo global. As dimensões que minimizam o custo são:

$$a = \sqrt[3]{6}, \quad b = \sqrt[3]{6} \quad \text{e} \quad c = \frac{\sqrt[3]{6}}{6}$$

3 CONCLUSÃO

A necessidade do homem, através dos tempos, o tornou um estudioso dos problemas naturais, bem como de suas causas e efeitos. Essa busca o fez perceber que tudo e todos estão relacionados de tal forma que nenhum efeito tem origem numa única causa. O mundo físico é multidimensional, e muitas das situações com as quais lidamos envolvem variáveis. O mesmo se pode dizer de outras áreas da matemática que podem ser facilmente aplicadas à realidade.

O Cálculo é uma amostra disso, ele é uma coleção de técnicas para a manipulação de certos limites, é menos estatístico e mais dinâmico, trata de variação e de movimento bem como de quantidades que tendem a outras quantidades. Hoje é usado na determinação de órbitas de satélites e naves espaciais, na predição do tamanho de uma população, na estimativa de como aumentar o preço do café, na previsão do tempo, na medida do fluxo sanguíneo de saída do coração, no cálculo dos prêmios dos seguros de vida e em uma grande variedade de outras áreas, e novas aplicações aparecem todos os dias.

O Cálculo foi criado como uma ferramenta auxiliar em várias áreas das ciências exatas e desenvolvido por Issac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), em trabalhos independentes. O cálculo das derivadas, em especial, é a base da teoria dos valores máximos e mínimos.

No século XVII, ao tentar determinar máximos e mínimos de uma curva, Fermat (1601-1665) reparou que a tangente tem que ser paralela ao eixo horizontal, nestes pontos. O problema era identificar quais os pontos em que a tangente é paralela ao eixo horizontal. Para chegar à tangente, Fermat usou o processo da posição limite de uma secante, em que a distância entre os pontos de intersecção com a curva é considerada infinitamente pequena. Para curvas polinomiais dadas pela equação $y = f(x)$, Fermat usou o método das coordenadas, e descobriu um outro para achar pontos em que a função assume valores máximos ou mínimos. Este método é a génese do que é hoje conhecido como processo de diferenciação.

O Cálculo Diferencial, é o estudo da definição, propriedade e aplicações da derivada ou deslocamento de um gráfico. As derivadas se aplicam em física, química, engenharia, tecnologia, ciências, economia e muito mais, além de problemas envolvendo máximos e mínimos. A maximização e minimização de funções de várias variáveis são utilizadas em problemas geométricos, físicos, econômicos, e outros. O cálculo é usado em todos os ramos das ciências fisícas, na ciência da computação, estatística, engenharia, engenharia, economia, medicina, medicina e em outras áreas sempre que um problema possa ser modelado matematicamente e uma solução ótima é desejada. Na esfera da medicina, o cálculo pode ser usado para encontrar o ângulo ótimo na ramificação dos vasos sanguíneos para maximizar a circulação. Na geometria analítica, no estudo dos gráficos de funções, o cálculo é usado para encontrar pontos máximos e mínimos, a inclinação, concavidade e pontos de inflexão. Na economia o cálculo permite a determinação do lucro máximo fornecendo uma fórmula para calcular facilmente tanto o custo marginal quanto a renda marginal.

Logo, a aplicação do cálculo para resolver problemas em um mundo multidimensional resultou na necessidade de generalização para incluir funções de mais de uma variável e cálculo de várias variáveis.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. Cálculo. Tradução Ivo Doering. – 8. Ed. – Porto Alegre: Bookman, 2007. 2 vol. (680; 672p.):il.; 28cm.

FINNEY, Ross L; WEIR, Maurice D; GIORDANO, Frank R. **Cálculo de George B. Thomas Jr.** - volume 2 – Tradução Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo**. 5 ed.; vol.2; Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 476p.

HAZZAN, Samuel; MORETTIN, Pedro A; BUSSAB, Wilton O. **Cálculo: Funções de Várias Variáveis.** – 2. Ed. – São Paulo: Atual,1986. (Métodos Quantitativos)

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica –** volume 1 – 3ª edição, 1994, Editora Harbra ltda.

MUNEM, Mustafa A. **Cálculo**. Rio de Janeiro: LTC, vol. 1 e 2, 1982.

STEWART, James. **Cálculo, Volume I e II**. – 5 edição – São Paulo: Thomson Learning, 2006.