UNIVERSIDADE TIRADENTES

ALBERTINO MESSIAS SANTOS

APARECIDA TAYLINY DA SILVA OLIVEIRA

OS 23 PROBLEMAS DE HILBERT

Propriá

2009

ALBERTINO MESSIAS SANTOS

APARECIDA TAYLINY DA SILVA OLIVEIRA

OS 23 PROBLEMAS DE HILBERT

Monografia apresentada a Universidade Tiradentes como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

ORIENTADOR:
ANTONIO JOSÉ DE JESUS SANTOS

Propriá

2009

ALBERTINO MESSIAS SANTOS

APARECIDA TAYLINY DA SILVA OLIVEIRA

OS 23 PROBLEMAS DE HILBERT

Monografia apresentada ao curso de Matemática da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em _____/_____/_____.

Banca examinadora

____

Orientador

Universidade Tiradentes

____

Nome do professor

Universidade Tiradentes

____

Nome do Professor

Universidade Tiradentes

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao pai pela tua proteção no dia de ontem e no dia de hoje. Os trabalhos aos quais me dediquei foram profícuos, graças á tua proteção e eu como uma criatura agradecida, venho aos teus pés exultante, dar oferenda em sentimentos das minhas vitorias, pois sei que tudo na vida esta em tuas mãos santas.

Agradecemos ao s familiares pelas palavras consoladoras que me chegaram de todas as formas e aos amigos que tiveram sua contribuição. Ao Antonio José de Jesus Santos nossos honrosos agradecimentos.

Introdução

A Matemática é um dos maiores patrimônios da humanidade, é fruto de muitos séculos de conhecimentos acumulados cada dia aperfeiçoado. Não podemos negar que, como conhecimento científico e instrumento de modificação do mundo, a Matemática é uma das maiores criações da humanidade e motor de quase toda a tecnologia existente. É importante reconhecer que, como fruto do pensamento humano, houve grandes homens que motivaram e impulsionaram seu aperfeiçoamento e evolução, e compreendendo como estes homens pensavam, facilita-nos entender como a Matemática se desenvolveu e nos permite criar instrumentos de desenvolvimento desta como ciência. É fundamental que toda pessoa humana perceba a importância da Matemática na história da humanidade e no seu desenvolvimento, e a compreensão desta importância só se dá entendendo a gênese deste conhecimento através da história das idéias matemáticas de homens e mulheres que modificaram este importante fruto do pensamento humano, chamada por Gauss de “A Rainha das Ciências”.

Este trabalho tem a pretensão de apresentar os 23 problemas de David Hilbert que em 1900, já era afamado professor em Gtittingen, Alemanha, e depois de muito analisar as pesquisas dos fins do século XIX, durante sua participação no Congresso de Paris, apresentou e propôs vinte e três problemas os quais, segundo acreditava, ocupariam a atenção dos matemáticos do século XX, numa tentativa de prenunciar os rumos que tomaria o progresso neste século. Dizia ele: "se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato devemos fazer passar por nossas mentes as questões não resolvidas e olhar os problemas que a Ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos no futuro:' Destes problemas, o primeiro trata de Teoria dos Conjuntos, o segundo é sobre os axiomas da Matemática, e os outros são sobre Topologia, Equações Diferenciais, Cálculo das Variações e demais campos. Pode-se afirmar que muitos deles ainda não estão resolvidos e que a Matemática neste século se desenvolveu em muitas direções não previstas como disse o próprio Hilbert: "Enquanto um ramo da Ciência oferece uma abundância de problemas, ele está vivo"

Depois do Congresso de 1900, os matemáticos se agruparam em duas escolas , dependendo da sua linha de pensamento: os " formalistas " liderados por Hilbert, e os " logicistas " tendo à frente Russel. Hilbert interessou-se por todos os aspectos da Matemática Pura, contribuindo para a Teoria dos Números, Lógica Matemática, Equações Diferenciais e também para a Física Matemática, sendo considerado uma figura importante de transição entre os séculos XIX e XX.

Quem foi David Hilbert?

David Hilbert matemático alemão, principal filósofo de sua geração e representante mais ilustre da tendência axiomática, nasceu em Königsberg no dia 23 de janeiro de 1862. O seu pai era Otto Hilbert, um juiz de cidade, que gozava de uma posição muito respeitável em uma cidade pequena e sua mãe uma apaixonada pelas ciências, tanto que se interessou por filosofia e astronomia e sua fascinação foi através dos números primos.

Seus estudos básicos foram na Universidade de Königsberg onde ele estudava idiomas, principalmente, o latim, pois era muito jovem e sua mãe o aconselhava que se dedicasse a algo mais fácil, porém, prazeroso. Durante um semestre, ele visitou a Universidade de Heidelberg para assistir a conferências sobre equações diferenciais com o conferencista Leonard Fuchs.

Em 1882, Hermann Minkowski, um estudante com apenas dezessete anos e que estudava na mesma universidade de Hilbert, ganhou o prestigioso prémio Grand Prix des Sciences Mathématiques des Académie des Paris.

Em 1883, depois que Heinrich Weber colaborador de Richard Dedekind na teoria de funções algébricas professor na Universidade de Königsberg e que Hilbert era seu aluno, viajou, Ferdinand Lindemann foi designado para ser o seu sucessor. A influência de Lindemann causou em Hilbert um interesse eloquente pela teoria dos invariantes.

Em 1884, Hilbert deu os primeiros passos de sua carreira juntamente com Minkowski que tornou-se seu amigo terminando, nesta universidade, a sua dissertação inaugural, sob a supervisão de Lindemann, com a tese intitulada " Über invariante Eigenschaften specieller binärer Formen, insbesondere der Kugelfunctionen " recebendo o título de Doutorado - Ph.D - Doctor Philosophie Human - em 1885. Nesse mesmo ano, defendeu publicamente duas teses recebendo o grau de Doutor em Filosofia. Adolf Hurwitz, professor assistente da referida universidade desde 1884, sugeriu a Hilbert que visitasse a Europa para conhecer os grandes matemáticos da actualidade. Depois de uma breve visita a Felix Klein, em Leipzig, ele foi a Paris onde se encontrou com Henri Poincaré. Em seguida, foi para Berlim estudar com Leopold Kronecker, um professor muito rígido em suas convicções. Posteriormente, Hilbert retornou a Königsberg e, após ser aprovado em outro exame público, passou a leccionar, de 1886 a 1892, na qualidade de Privadozent - conferencista ou professor assistente (professor que recebe uma pequena remuneração). Em virtude de viver de uma remuneração muito pequena, ele decidiu fazer outra viagem de estudo que, também, tinha por finalidade, conhecer os vinte e um maiores matemáticos da época. Nessa viagem conheceu, em Erlanger, o matemático alemão Paul Gordan, que o chamavam de " o rei dos invariantes " em que foi apresentado o seguinte problema:

Existe uma base finita para expressar um sistema infinito dos invariantes?

Seguindo sua viagem, ele foi para Göttingen e lá conheceu Karl Weierstrass, Schwartz e, mais uma vez, visitou Klein e Kronecker, retornando, imediatamente, para Königsberg, pois o seu desejo era solucionar o problema apresentado por Gordan e, em 1888, ele produziu uma prova de existência para o problema. Com esta solução, tornaria o primeiro triunfo matemático alcançado por ele. Porém, em virtude da rigidez de Kronecker e Gordan nas suas convicções eles se recusaram a aceitar a prova apresentada.

Por outro lado, o que mais Hilbert precisava era o apoio de um cientista mais experiente e mais velho, tanto que apareceu Klein e analisando os seus trabalhos, convidou-o para Göttingen com o objetivo de ensiná-lo. Em 1892, Hilbert inventou uma prova da construção do problema de Gordan que o convenceu. Sobre o trabalho de Hilbert, Gordan disse:

" Das ist nicht Mathematik. Ist de Das Theologie ! "
" Isso não é matemática, é teologia ! "

Em junho de 1892, Hurwitz tornou-se um professor do Swiss Federal Institute of Technology em Zurich e Hilbert foi nomeado Extraordinarius - professor associado - em Königsberg. No dia 12 de outubro, Hilbert casou-se com a sua prima segunda, Käthe Jerosch e no dia 11 de agosto de 1893, nasceu o seu primeiro e único filho, Franz. No ano do nascimento de seu filho, Hilbert é promovido a Ordinarius - professor titular - em Königsberg onde permaneceu no cargo até 1895. Alguns semanas depois, Hilbert e Minkowski foram convidados pela Sociedade matemática alemã a escrever uma pesquisa sobre a teoria dos números. Esta honra, provavelmente, foi dada à Hilbert por causa das recentes, mais directas provas dos números reais transcendentes ' e ' (Autor da demonstração foi Charles Hermite em 1873 e, posteriormente foi grandemente simplificada por Hilbert) e p (pi) (Autor da prova foi Ferdinand Lindemann em 1882). Foi decidido que Hilbert pesquisaria sobre a teoria dos números algébricos, enquanto que Minkowski trabalharia nos aspectos geométricos da teoria dos números. Embora Minkowski nunca tivesse terminado sua pesquisa, o livro de David Hilbert, intitulado " Zahlbericht ", era, de acordo com o examinador, " uma verdadeira jóia de literatura " matemática. Antes do livro ser publicado, porém, Hilbert recebeu um telegrama importante de Felix Klein. Ele foi promovido em 1895 ao cargo de professor titular em Göttingen, o maior centro renovado de matemática do mundo, a universidade que tinha amoldado um grande número de teoristas como Carl Friedrich Gauss. Para os matemáticos do século XX , isto não estava longe de acontecer. As maiores mentes matemáticas da época, faculdades e estudantes, tinham-se aglomerado em Göttingen e Klein soube que Hilbert faria uma adição esplêndida.

Hilbert, ao se transferir, por volta de 1895, para Göttingen inicia seus estudos acerca dos números algébricos. Os trabalhos anteriores, sobretudo os de Gauss, Dirichlet, Kummer, Kronecker e Richard Dedekind, haviam dado contorno à noção-chave para a resolução dos problemas que a teoria colocava Ÿ a noção de Ideal.

A prova do Problema de Gordan conduziu, Hilbert, a um dos teoremas mais fundamentais da álgebra, tornando-o um matemático de primeira linha. O teorema diz o seguinte:

"Todo subconjunto de um anel polinomial de variáveis independentes tem uma base ideal finita ".

Nesse campo ele formula as leis gerais da teoria, unifica os resultados até então obtidos e introduz novas noções. Desenvolveu, uma forma para o símbolo de Adrien - Marie Legendre e a idéia de uma norma de p-adic. em que ele definiu como sendo um inteiro no campo quadrático Q que corresponde à norma de um inteiro que satisfaz o módulo de Q para qualquer p. Generalizou este símbolo para que (a,Q/p) tenha o valor +1, se 1, é uma norma de p-adic e se for -1, não é uma norma de p-adic. Hilbert achou que o símbolo * é multiplicativo e significa que (a,Q/p)*(b,Q/p) = (ab,Q/p). Além disso, ele começou a explorar as relações entre teoria dos números e as funções modulares, como, também, demonstrou a transcendência de p e e de uma forma mais elegante e questionou a transcendência sobre $2^{\sqrt{2}}$que só foi demonstrado em 1934 quando, Gelfond e Schneider, trabalhando independentemente, demonstraram que:

" Se a e b são números algébricos e se b é irracional, então ab é transcendente".

Em 1899, Hilbert publicou a obra intitulada "Grundlagen der Geometrie " (Fundamentos da Geometria) através da qual não se limitou a expor de modo rigoroso a geometria euclidiana, mas, unificar e correlacionar, sob o prisma de um só princípio norteador, o da dedução a partir de premissas claramente explicitadas. Assim sendo, ele inaugurou toda uma série de pesquisas acerca da independência mútua dos vários axiomas, contribuindo assim, para o estabelecimento dos fundamentos formalísticos da matemática. Ao expor os fundamentos da geometria, ele percebeu que nem todos os termos podem ser definidos e por esta razão iniciou sua Geometria com três objetos não definidos - ponto, reta e plano - e seis relações não definidas - estar sobre, estar em, estar entre, ser congruente, ser paralelo e ser contínuo -, formulando vinte e um postulados geométricos conhecidos como Axiomas de Hilbert, os quais eram consistentes, ou seja, nenhum axioma sobrepôs o outro, e completo, pois, esse conjunto de axiomas expressava toda a geometria. A Teoria dos Conjuntos passou a invadir a Geometria num grau crescente de generalização e abstração, tornando-a um conjunto muito mais completo e abstrato.

Vale ressaltar que, em 1794, já havia preocupação dos estudiosos quanto a uma nova formulação e organização no que diz respeito à geometria de Euclides, tanto que Legendre trabalhou incansavelmente lançando uma obra na qual formula várias proposições de Euclides, separa os teoremas dos problemas e simplifica as demonstrações.

Durante o período em que desenvolvia a axiomatização da geometria, Hilbert trabalhava, também, para o desenvolvimento de vários ramos da matemática e da física cujo objetivo era o de axiomatizar e de organizar toda a matemática. Inspirado a tentar desenvolver o programa e na tentativa de alcançar essa meta, ele ampliou as suas contribuições para a matemática em várias direções, tais como:

O teorema de 1890 que afirma o seguinte: Qualquer ideal polinomial admite base finita.

Outras contribuições importantes são:

Os aperfeiçoamentos na teoria dos corpos algébricos; o estudo de relações entre equações integrais e problemas de valor de contorno; a solução para o problema de Dirichlet que narramos a seguir:

Determinar a função V(x,y,z), contínua e com derivadas parciais contínuas de primeira e segunda ordem em todos os pontos de uma dada região fechada R, tomando valores previamente fixados na fronteira de R.

Ademais, com o desenvolvimento do programa de pesquisa que foi conhecido como a 'escola' de formalista de matemática e, posteriormente, como o Programa de Hilbert, ele tinha esperança de que tudo na matemática poderia e deveria ser provado a partir de axiomas básicos, cujo resultado deveria demonstrar conclusivamente os dois elementos mais importantes do sistema matemático.

O primeiro elemento diz respeito ao espírito de completude, isto é, pelo menos em teoria, a matemática deveria ser capaz de responder as perguntas individuais e o segundo elemento é o que trata do problema da inconsistência, ou seja, tendo-se mostrado que uma declaração é verdadeira por um método, não deveria ser possível, através de outro método, mostrar que ela é falsa.

Com essa finalidade, no verão do dia 08 de agosto de 1900, em Paris, Hilbert fez uma palestra no II Congresso Internacional de Matemática onde apresentou e propôs vinte e três problemas de vários ramos da matemática. Esses problemas denominados Problemas de Paris continuam a inspirar os matemáticos, pois, a maioria, permanece sem solução. Com o intuito de estimular os jovens matemáticos da época, ele disse em seu pronunciamento:

"Se quisermos ter uma idéia do desenvolvimento provável do conhecimento matemático no futuro imediato devemos fazer passar por nossas mentes as questões não resolvidas e olhar os problemas que a Ciência de hoje coloca e cujas soluções esperamos no futuro "

A partir de 1900 a posição de Hilbert melhorou significativamente no mundo da matemática, tanto que várias instituições de diversos países convidaram-no para trabalhar. No entanto, ele preferiu continuar em Göttingen e, em 1902, a Universidade de Berlim ofereceu-o a cadeira de Leonard Fuchs. Hilbert aceitou, mas solicitou que se criasse uma nova cadeira a fim de que fosse ocupada pelo seu amigo Minkowski.

Em 1904, Hilbert apresentou uma importante contribuição para o mundo da ciência, formulando a teoria geral das equações integrais lineares cuja sistematização final ocorreu em 1912 e, em 1906, criou os fundamentos da teoria de funções com infinitos números de variáveis. Estes dois trabalhos são considerados, no campo da análise, os mais notáveis visto que, ele inspirou-se na álgebra linear e sua tradução geométrica - nos espaços de dimensão finita - e estabeleceu os fundamentos de uma álgebra funcional, cujos elementos não são pontos da geometria e sim, das funções. Esta idéia conduziu Hilbert ao que hoje chamamos de espaço topológico. Ele aproveitou esta idéia e inseriu o espaço de dimensão infinita denominado, posteriormente, de Espaço de Hilbert e cuja definição passou a expor:

Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial H, munido de um produto interno, e completo em relação à norma definida por esse produto interno. Este conceito foi muito útil em análise matemática e mecânica quântica, pois, com os resultados obtidos das equações integrais, Hilbert contribuiu para o desenvolvimento da física-matemática, especialmente, na teoria cinética dos gases e das radiações. Estas pesquisas se estenderam até o ano de 1910, ficando, os seus alunos, encarregados de completar o referido programa desenvolvendo as aplicações e os métodos propostos por Hilbert.

Este espaço permite uma transposição dos resultados da álgebra elementar para a álgebra funcional. Ademais, ele idealizou o que se chama de Cubo de Hilbert cuja definição expomos:

Um cubo de Hilbert é o conjunto C das seqüencias de números reais $x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots) \mid 0 \le x_i \le 1/i \;\; \forall i \in N$.

Em 1909, Hilbert apareceu com outra inovação na teoria dos números que foi a demonstração do chamado " Problema de Waring " que foi o ponto de partida de uma enorme área de pesquisa na teoria supracitada. Em 1707, Edmund Waring propôs o seguinte:

Todo inteiro pode ser escrito como uma soma de um número fixo de potências k-ésimas, ou seja, pode-se demonstrar que todo inteiro é uma soma de quatro quadrados, nove cubos, dezenove quartas potências, etc.

Este teorema é uma generalização do famoso e clássico Teorema de Lagrange:

Todo inteiro positivo pode ser expresso como a soma de quadrados de quatro inteiros.

Por exemplo, o número primo 2 pode ser escrito como 12 + 12 + 02 + 02, uma soma de quatro quadrados.

O trabalho de Hilbert era incansável, tanto que, a medida que pesquisava sobre um determinado assunto, sempre existia, paralelamente, um outro, como podemos constatar quando ao analisar o Teorema de Euclides que diz:

Existe um número infinito de números primos.

Os teoremas de Legendre, Gauss e Dirichlet chegou à conclusão que poderia ajudar a explicar o mistério do infinito criando um exemplo conhecido como o Hotel de Hilbert.

Em 1910, Hilbert recebeu o prestigioso Prêmio Bolyai que o reconheceu como o segundo maior matemático do mundo depois de Poincaré. O comitê do prêmio louvou o seu trabalho em matemática, mas foi neste momento em que sua atenção estava voltada para Física. Ele começou com teoria cinética dos gases e empregou os métodos que tinha desenvolvido em equações integrais. O que mais chamou a sua atenção foram as teorias da radiação, da gravitação e, posteriormente, a teoria da relatividade geral. Em virtude de Hilbert não ter domínio na física, ele contratou vários estudantes com o objetivo de transmitir os conhecimentos de que ele precisava. Hilbert sempre admirou a genialidade de Albert Einstein, contudo, ele fazia algumas restrições quanto aos seus conhecimentos matemáticos, tanto que, chegou a comentar certa vez:

" Todo menino nas ruas de Göttingen entende mais sobre geometria quadri-mensional que Einstein. Ainda que, ele tenha elaborado o trabalho e não os matemáticos."

Em 1915, Hilbert, em seus estudos sobre a Teoria da Relatividade descobriu equações que o consagraria definitivamente como um dos maiores gênios de todos os tempos. No entanto, existiu uma verdadeira confusão quanto à data da entrega para apreciação do artigo contendo as referidas equações. Alguns historiadores através de documentos mostram que Hilbert submeteu o seu artigo no dia 20 de novembro de 1915, mas as provas das equações só foram enviadas no dia 06 de dezembro de 1915, enquanto que Einstein remeteu toda a documentação para apreciação no dia 02 de dezembro de 1915.

Nesse período havia uma discriminação institucionalizada muito grande contra às mulheres, tanto que, ao tomar conhecimento dos trabalhos apresentados, em meados de 1915, por Emmy Noether demonstrando um vasto conhecimento de matemática, Einstein a descreveu como sendo:

" O mais significante gênio matemático criativo já produzido desde que as mulheres começaram a cursar os estudos superiores. "

Naquele mesmo ano, ela foi convidada por Klein e Hilbert para fazer parte das pesquisas no instituto de matemática, em Göttingen, onde eles sentiam que as suas pesquisas contribuíam significativamente para complementar os trabalhos deles na teoria de relatividade.

Aproveitaram a aceitação da jovem e a convidaram para fazer parte do quadro do quadro da Universidade de Göttingen na qualidade de " Privatdozent ". Apesar deste outro convite ser aceito, a solicitação feita por Hilbert e outros matemáticos foi negada pela maioria do corpo docente argumentando que não poderia permitir uma mulher assumir tal posto, pois poderia se tornar professora e membro do conselho universitário. Ademais, Hilbert foi indagado quando perguntaram o que os soldados alemães ao voltarem para a universidade iriam pensar ao descobrirem que devem aprender aos pés de uma mulher? Imediatamente, Hilbert respondeu:

" Meine Herren , eu não vejo como o sexo de um candidato possa ser um argumento contra sua admissão. Afinal, o conselho não é uma casa de banhos”. Edmund Landau - um professor que ocupava o cargo de Diretor do Departamento de Matemática, da Universidade de Göttingen, entre 1909 e 1934, que tinha como uma de suas responsabilidades examinar os trabalhos dos candidatos ao Prémio Wolfskehl - ao ser perguntado por um colega se Noether era de fato uma grande matemática, respondeu:

"Eu posso testemunhar que ela é um grande matemático, mas se ela é uma mulher eu não posso garantir" .

Após 1915, Hilbert passou a dedicar-se, exclusivamente, ao campo da lógica retomando, assim, as investigações nesse campo com o propósito de encontrar os fundamentos lógicos de todas as teorias matemáticas, reconstruindo, assim, os princípios fundamentais, cujo objetivo era mostrar que seriam consistentes.

Alguns historiadores acham que um dos fatores que estimularam Hilbert e outros matemáticos a dedicar-se com maior cautela as essas questões foi o de manifestar-se contra a tendência dos chamados ' intuicionistas ', liderados pelo matemático holandês Luitzen Egbert Jan Brouwer que tinham por finalidade eliminar, não só, os paradoxos da teoria dos conjuntos de Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor, como também, toda a sua teoria e uma boa parte da análise clássica.

Após anos de pesquisa, Hilbert através de seu programa, criado por volta de 1890, queria unir a comunidade matemática para ajudá-lo a realizar em sua visão um sistema matemático livre de dúvidas ou inconsistências, como também, revelar novas perguntas e criar novas áreas de pesquisa com o objetivo de estimular as gerações futuras de matemáticos. A sua aspiração era tão eloqüente que numa conferência no dia 8 de setembro de 1930 em um de seus pronunciamentos e em seu testamento ele afirmou:

Nós devemos saber, nós vamos saber.

O objetivo de Hilbert era criar um modelo tal que as bases da matemática fosse inabalável e para isso seria necessário questionar idéias que os outros matemáticos, a partir da antiguidade, consideravam certas como por exemplo a lei da tricotomia que declara o seguinte:

Todo número é negativo, positivo ou zero.

Esta declaração é verdadeira, no entanto, os matemáticos não-lógicos, da época, não se preocupavam em prová-la. Os matemáticos lógicos perceberam que esta declaração poderia ser falsa, pois, precisava ser provada. Esta declaração só foi demonstrada como verdadeira no final do século XIX.

Com base nesse raciocínio ele publicou, em 1928, uma tratado de lógica formal baseado nos costumes de Giuseppe Peano e Bertrand Russel intitulado " Grundzüge der theoretischen Logik " (Elementos de Lógica Teórica).

A partir de então, a consistência de vários ramos da matemática foi demonstrada e os lógicos prosseguiram com otimismo a sua tarefa, perseguindo o ideal de revelar que toda a matemática estaria isenta de contradições. Em conseqüência disso, a lógica desdobrou-se em numerosos ramos, subdividindo-se e multiplicando-se de modo quase inconcebível.

Em 1931, Hilbert tentou estabelecer a consistência subjacente de toda a matemática, um esforço que foi demonstrado impossível pelo logicista americano Kurt Gödel, ou seja, Gödel estabeleceu a impossibilidade, em certos sistemas, de se demonstrarem, com o auxílio de regras desse sistema, alguns dos teoremas do próprio sistema, e que são encarados por algum critério como verdades. Em outras palavras, em um dado sistema existem declarações que não podem ser demonstrados ou contestados. Essas declarações fundamentais são chamadas axiomas.

A título de ilustração apresentaremos alguns axiomas que são os alicerces de toda a estrutura da aritmética:

Para quaisquer números m e n tem-se $m + n = n + m$

Para cada número n, existe outro número k tal que $n + k = 0$

Durante esse tempo, os lógicos participaram desse longo processo lento, doloroso e árduo com o fim de reconstruir toda a base matemática, usando o mínimo possível de axiomas, pois, o objetivo era consolidar todo o conhecimento matemático, empregando os padrões mais rigorosos da lógica. Todas as idéias começaram a ser desenvolvidas a partir de 1934 quando do lançamento do primeiro volume da obra intitulada " Grundlagen der Mathematik " (Fundamentos da Matemática).

Em 1936, o matemático norte-americano Alonzo Church demonstrou a impossibilidade de se resolver de um modo geral uma das questões centrais para a teoria originariamente formulada por Hilbert.

Em 1939, foi publicado o segundo volume da obra acima referida abordando temas da mais alta relevância, que serviu para impulsionar os jovens matemáticos de gerações futuras.

Aos 81 anos este talentoso gênio faleceu, exatamente no dia 14 de fevereiro de 1943 na cidade de Göttingen - Alemanha deixando para trás trabalhos de tão alta magnitude que, ele foi colocado ao lado de Gauss e de outras figuras ilustres, como um dos ' príncipes da matemática. '

Lista e situação dos problemas

Os 23 problemas de Hilbert são:

Número do problema	**Situação**	**Enunciado**
Problema 1	**resolvido**[1]	Provar a hipótese do continuum (HC) de Cantor
Problema 2	**resolvido**[2]	Demonstrar a consistência dos axiomas da aritmética
Problema 3	**resolvido**[3]	Pode-se provar que dois tetraedros têm o mesmo volume (sob certas condições)?
Problema 4	**vago demais**[4]	Construir todos os espaços métricos em que as linhas são geodésicas

Problema 5	**resolvido**[5]	Todo grupo contínuo é automaticamente um grupo diferencial?
Problema 6	**não-matemático**[6]	Transformar toda a Física em axiomas
Problema 7	**resolvido**[7]	a^b é transcendente para $a \neq 0,1$ algébrico e b irracional algébrico? (ex.: $2^{\sqrt{2}}$)
Problema 8	**aberto**[8]	A Hipótese de Riemann e a Conjectura de Goldbach
Problema 9	**parcialmente resolvido**[9]	Achar a lei de reciprocidade mais geral em todo campo de número algébrico
Problema 10	**resolvido**[10]	Encontrar um algoritmo que determine se uma equação diofantina tem solução
Problema 11	**parcialmente resolvido**[11]	Classificar as formas quadráticas a coeficiente nos anéis algébricos inteiros
Problema 12	**Aberto**	Estender o teorema de Kroneker para os corpos não abelianos.
Problema 13	**resolvido**[13]	Demonstrar a impossibilidade de resolver equações de sétimo grau através de funções de somente duas variáveis
Problema 14	**resolvido**[14]	Provar o carácter finito de certos sistemas completos de funções
Problema 15	**parcialmente resolvido**[15]	Desenvolver bases sólidas para o cálculo enumerativo de Schubert

Problema 16	**aberto**[16]	Desenvolver uma topologia de curvas e superfícies algébricas
Problema 17	**resolvido**[17]	Demonstrar que uma função racional positiva pode ser escrita sob a forma de soma de quadrados de funções racionais
Problema 18	**resolvido**[18]	Construir um espaço euclidiano com poliedros congruentes. Qual a maneira mais densa de se empacotarem esferas?
Problema 19	**resolvido**[19]	Provar que o cálculo de variações é sempre necessariamente analítico
Problema 20	**resolvido**[20]	Todos os problemas variacionais com certas condições de contorno têm solução?
Problema 21	**resolvido**[21]	Prova da existência de equações diferenciais lineares tendo um determinado grupo monodrômico
Problema 22	**resolvido**[22]	Uniformizar as curvas analíticas através de funções automorfas
Problema 23	**resolvido**[23]	Desenvolver um método geral de resolução no cálculo de variações

Notas

1. O resultado de independência de Cohen, mostrando que a *hipótese do Continuum* (HC) independe do axioma de Zermelo-Fränkel e do axioma da escolha (ZFC) é freqüentemente citado para justificar a asserção que o primeiro problema foi resolvido, apesar de que possa ser possível que

a Teoria dos Conjuntos deveria ter axiomas adicionais capazes de resolver o problema.

2. Gödel demonstrou em 1931, através do seu teorema da Incompletude, que isso não podia ser demonstrado sem sair da aritmética. Gerhard Gentzen, no entanto, demonstrou que a resposta era afirmativa colocando-se o problema no âmbito da Teoria dos Conjuntos.
3. Dehn, aluno de Hilbert, mostrou que não já em 1900, demonstrando que era impossível dividir um cubo e um tetraedro regular de mesmo volume em um número finito de poliedros idênticos dois a dois. Apesar de tudo, o paradoxo de Banach–Tarski constitui um resultado positivo para essa questão.
4. Segundo Rowe & Gray (veja referência abaixo), a maioria dos problemas foram resolvidos. Alguns não foram completamente definidos, mas progresso suficiente foi feito para que se possa considerá-los como "resolvidos"; Rowe & Gray consideram o quarto problema como vago demais para se dizer se foi ou não resolvido.
5. O teorema de Gleason-Montgomery-Zippin, em 1953, respondeu com a afirmativa.
6. Graças à aparição da Teoria da Relatividade e da Mecânica Quântica, o problema tornou-se rapidamente obsoleto. No entanto, pode-se notar que a Física teórica e a Matemática se aproximam cada vez mais.
7. Os trabalhos de Gelfond, completados por Schneider e Baker, permitiram a resolução parcial deste problema (ver Teorema de Gelfond-Schneider)
8. O problema 8 contém dois famosos problemas, e ambos permanecem sem solução. O primeiro deles, a hipótese de Riemann, é um dos 7 problemas do Prêmio Problemas do Milênio, que têm a fama de serem os "Problemas de Hilbert" do século XXI. Progressos foram feitos por Pierre Deligne, que demonstrou as conjecturas de Weil, e recebeu por isso a medalha Fields em 1978, mas estima-se que a solução do problema ainda esteja longe.
9. Resolvido por Emil Artin em 1927.

Entre os vinte e três problemas de David Hilbert alguns até hoje alguns ainda não tem solução como vimos no quadro acima, dentre o problemas resolvidos escolhemos quatro para demostrarmos sua solução.

Problema 1

Hipótese do continuum

A **hipótese do continuum** é uma conjectura proposta por Georg Cantor. Esta conjectura consiste no seguinte:

> **Não existe nenhum conjunto com mais elementos do que o conjunto dos números inteiros e menos elementos do que o conjunto dos números reais.**

Aqui *mais elementos* e *menos elementos* tem um sentido muito preciso (ver número cardinal). Esta hipótese foi um dos 23 Problemas de Hilbert apresentados na conferência do Congresso Internacional de Matemática de 1900, o que levou a que fosse estudada profundamente durante o século XX.

Nem verdadeira nem falsa

Cantor acreditava que a conjectura era verdadeira. No entanto:

- em 1940, Kurt Gödel mostrou que a falsidade da hipótese do continuum não poderia ser provada a partir dos axiomas de Zermelo-Fraenkel.

- em 1963, Paul Cohen mostrou que a veracidade desta hipótese também não poderia ser provada a partir dos mesmos axiomas.

Deste modo a hipótese do continuum é independente dos axiomas de Zermelo-Fraenkel. Esta independência leva alguns matemáticos a considerarem que os axiomas de Zermelo-Fraenkel não são os mais adequados para a teoria de conjuntos e que deveriam ser considerados axiomas adicionais para tornar esta hipótese verdadeira ou falsa.

Hipótese do Continuum generalizada

Aleph (**א**) é uma letra usada para representar cardinais infinitos. A cardinalidade dos conjunto dos números inteiros é $\aleph_0$, o cardinal seguinte é $\aleph_1$, etc. Usando os números cardinais א, a hipótese do Continuum pode ser escrita como:

$$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$$

A generalização desta hipótese (que não pode ser provada a partir dela) é que para qualquer ordinal α:

$$\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$$

Um cuidado deve ser observado na fórmula acima: o tratamento de α + 1 usa aritmética ordinal enquanto que o tratamento de $2^{\aleph_\alpha}$usa aritmética cardinal; todo número cardinal é, por definição, um número ordinal, mas a recíproca não é verdadeira.

Cardinalidade do contínuo

Pelos axiomas de Zermelo-Fraenkel com o axioma da escolha, mas sem a hipótese do contínuo, existem várias hipóteses que não podem ser provadas nem verdadeiras nem falsas, tais como:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_n$$

para qualquer n >= 1. Além disso, outros valores possíveis (ou seja: também não podem ser provados ou desprovados) são, por exemplo:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+42}$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$$

Por outro lado, o teorema de König mostra que alguns valores (baseados no conceito matemático da cofinalidade) não são possíveis, por exemplo:

$$2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$$

Problema 6

O **Sexto Problema de Hilbert** é um dos mais complicados problemas da famosa lista pois a sua proposta é ***transformar toda a Física em axiomas*** e vai de encontro ao fato de que muitas verdades matemáticas algumas vezes não serem correspondidas na física e vice-versa.

Buscando a unificação

Se fossemos montar então axiomas unificados (física e matemática) teríamos que anular algumas verdades matemáticas ou algumas verdades físicas. Porém com os novos avanços tanto na matemática quanto na física muitos axiomas puderam ser reformulados graças a física quântica e a teoria da computação algorítmica na matemática. Através desses dois campos "teóricos", com eles não seria possível apenas vários axiomas que definam matematicamente a física, mas uma lei matemática geral que defina toda a física, como um algoritmo finito, mas esse caminho é o mais difícil por estar muito distante, as teorias físicas se renovam com frequência notável e um algoritmo que defina infinitos números de dados tão complexos, aleatórios e caóticos seria impossível pelo menos para a capacidade humana, para definir toda física de maneira matemática é bem mais fácil pensar em um universo físico como um todo, algo que "segue padrões quantitativos", porém quando vamos considerar o universo como um todo e trazer isso para um ou uns algoritmos matemáticos encontramos cálculos ilimitados e incalculáveis humanamente, por isso o problema ainda não foi resolvido de forma matemática.

Problema 7

O **Sétimo problema de Hilbert** é um dos Problemas de Hilbert, propostos por David Hilbert em 1900. Este problema trata da natureza irracional e transcendental de alguns números (*Irrationalität und Transzendenz bestimmter Zahlen*). Duas questões específicas são feitas:

1. Em um triângulo isósceles, se a razão entre o ângulo da base e o ângulo do vértice é um número algébrico irracional, então a razão entre a base o lado será transcendente?
2. a^b é sempre transcendente, quando $a \notin \{0,1\}$ for algébrico e *b* for algébrico irracional?

A segunda pergunta foi respondida afirmativamente por Aleksandr Gelfond em 1934, e refinada por Theodor Schneider (1911–) em 1935. Esse resultado é conhecido como o Teorema de Gelfond ou o Teorema de 's Gelfond–Schneider.

Note-se que *b* não pode ser racional ou transcendente: se *b* for racional, então a^b será algébrico; do mesmo modo, existem valores transcendentes de *b* (por exemplo, $b = \log_a 10$) para os quais a^b será algébrico (nesse exemplo, a^b = 10)

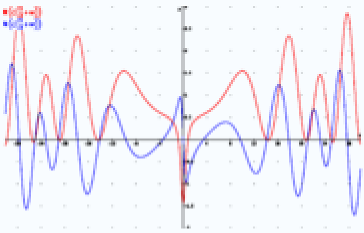
Uma das generalizações é:

$b \ln\alpha + \ln\beta = 0$

da forma linear generalizada dos logaritmos que foi tratada por Alan Baker.

Problema 8

Hipótese de Riemann



Gráficos das partes real (a vermelho) e imaginária (a azul) da linha crítica da função zeta de Riemann.

A **hipótese de Riemann** é uma hipótese matemática, publicada pela primeira vez em 1859 por Bernhard Riemann, que declara que os zeros não-triviais da função zeta de Riemann pertencem todos à "linha crítica":

$$\sigma = \mathbb{R}[s] = 1/2$$

onde $\mathbb{R}[s]$ denota a parte real de s.

Os zeros triviais da função zeta de Riemann são os inteiros negativos pares -2,-4,-6,...

A hipótese de Riemann sobre os números primos é de tal importância que tem intrigado os matemáticos há mais de 150 anos. A hipótese é um dos poucos problemas não resolvidos do programa de Hilbert e foi colocado como problema número 1 de Smale. É tão difícil que em 2000 o Clay Mathematics Institute ofereceu um prêmio de 1 milhão de dólares a quem prová-lo.

A Conjectura de Goldbach

Os números primos sempre fascinaram o ser humano. A partir de sua definição simples podemos obter resultados belíssimos, como o Teorema Fundamental da Aritmética e a existência de infinitos números primos.

No entanto, conhecemos muito pouco a respeito dos números primos. Por exemplo, os primos da forma p e são conhecidos como primos gêmeos. Assim, 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19 são exemplos de primos gêmeos. Uma questão que se coloca é a seguinte: **Existem infinitos primos gêmeos?** Não se conhece uma resposta para esta questão. Em 1919, Brun provou que a série formada pela soma dos recíprocos dos primos gêmeos converge, obtendo B=Σ(1/p+1/p+2)=(1/3 +1/5)+(1/5+1/7)+(1/11+1/13)+... = 1,902... .

Uma outra especulação a respeito dos números primos nos leva à seguinte lista

4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=5+5, 12=5+7, 14=7+7, 16=5+11, ...

Parece que todos os números inteiros pares maiores do que 2 podem ser escritos como sendo a soma de dois números primos. Esta observação foi feita em 1742 por Christian Goldbach numa carta a Euler.

Conjectura de Goldbach: **Todo número inteiro par maior que 2 pode ser escrito como uma soma de dois números primos**.

Várias tentativas para a sua demonstração têm sido feitas. Por exemplo, já se mostrou que ela é verdadeira para inteiros pares menores que O caso geral continua em aberto.

Conclusão

Este trabalho tem como por maior objetivo enfatizar a importancia do trababalho de David Hilbert para a matematica moderna. Em 1900, David

Hilbert, um dos grandes matemáticos de seu tempo, propôs 23 problemas que ficaram conhecidos como " Os problemas de Hilbert", que foram aqueles lançados no século XX. Isto ocorreu em Paris, durante o II Congresso Internacional de Matemáticos, em conferência proferida em 08 de agosto de 1900. Alguns desses problemas enunciados se revelaram muito mais fáceis do que faria supor e foram logos resolvidos. Vários foram formulados de modo impreciso o que dificultava saber se haviam sido resolvidos ou não. Entretanto, na maioria, foram problemas difíceis e a sua solução deu fama instantânea aqueles que venceram cada etapa, com fama tão significativa como um "Prêmio Nobel". Agora mais recentemente em 2000, houve novo encontro em Paris. Todos, exceto um dos problemas de Hilbert, haviam sido resolvidos.

E agora? Os matemáticos resolveram reproduzir novamente em Paris o que ocorrera em 1900 apresentando uma lista de problemas, tentando escolhe-los, com todo o rigor de seu provável impacto sobre a sociedade.

E o que tem isto com a Informática? Tem que foram definidos sete problemas dos quais um, é o que restou dos problemas de Hilbert. E desses problemas, se resolvidos, dois são intrinsecamente problemas ligados à aplicações práticas da informática, e um terceiro, ao uso da informática na representação de fenômenos físicos importantíssimo em mecânica dos fluidos,e compreensão da circulação sanguínea.

O primeiro problema consiste em provar a hipótese formulada pelo matemático

alemão Bernhard Riemann em 1859 da tentativa do padrão dos números primos. Já é conhecido desde Euclides que os números primos continuam indefinidamente. Será isto tudo que pode-se dizer? E como pode um estudo de números primos nos ser úteis?

Muito simples, a compreensão dos números primos permitirá avanços na segurança de informações de computadores. Por incrível que pareça, toda a vez que se usa um caixa eletrônico de banco e faz uma conexão, esta conexão é segura se está usando a teoria dos números primos para manter esta segurança. A conexão segura é aquela em que você pode enviar dados, como por exemplo número de seu cartão de crédito sem que um "hacker" possa interceptar a mensagem e saber seus dados pessoais podendo lhe dar prejuízos enormes.

A segurança é conseguida codificando a mensagem (criptografando) de forma a que só um destinatário tenha acesso ao conteúdo original. A história conta que Julio Cesar, Imperador Romano, usava um sistema muito simples para codificar suas mensagens: substituía cada letra do alfabeto por outra usando uma regra fixa. Hoje em dia, com o poderio computacional disponível, planejar um sistema de criptografia seguro, é muito difícil. E a fatoração de números enormes conhecidos como criptografia de chave pública, tem fornecido a resposta a este problema. Para conhecimento dos padrões dos primos permitiria avaliar quão seguro é um sistema de criptografia.

O segundo problema é o da hipótese de lacuna de massa e está mais ligado à física quântica do que a computação.

O terceiro é tipicamente de computação, e está ligado à complexidade. Todos
aqueles que ainda se lembram de seu curso de teoria da computação, sabem que um problema pode ou não ter solução. Se tem solução ele é dito computável, se não a tem ele é dito não computável. Um problema computável exige um determinado esforço para obter sua solução, e este esforço varia com a quantidade de dados. Dependendo da velocidade que aumenta os recursos dependendo da quantidade de dados tem-se problemas logarítmicos, lineares., polinomiais – NP completos. Esta ultima classe de problemas exige uma quantidade de recursos que cresce tão rapidamente que sua solução para muitos dados é impraticável. Mas até hoje, não se provou que os problemas NP não são polinomiais disfarçados., nem provou-se o contrário. A solução
deste problema levaria a um impacto significativo na indústria, no comércio, e na comunicação que ocorre a rede mundial de computadores.

O problema seguinte diz respeito as equações de Navier-Stokes, equações diferenciais parciais. Essas equações servem de modelo matemático para o movimento de fluidos e gases e sua solução é desconhecida. Não se sabe nem mesmo se existe solução. Atualmente consegue-se apenas resolver casos particulares desta equação, e esses casos são úteis tanto em projetos de aeronaves, cascos de navio e outros artefatos envolvendo movimentos de fluidos e gases, bem como, no melhor conhecimento de fisiologia. Em fisiologia, estas equações permitem estudar desde escoamento do sangue
em veias e artérias, bem como formação de depósitos que as entopem. O

desconhecimento de soluções levam a técnicas de simulação do âmbito da informática, um tipo de simulação que é pouco estudada nos currículos atuais que é a Simulação de Sistemas Contínuos, mas cuja utilidade é extremamente abrangente. O conhecimento de soluções destas equações levariam certamente a melhores projetos na engenharia naval e aeronáutica, bem como, indicaria novas formas de tratamento de problemas cardíacos.

Os três últimos problemas tem um pouco menos ligação com informática desenvolvida nos dias atuais. São eles a conjectura de Point Carre, a de Birch-Swinnerton-Dyer e a de Hodge.

O primeiro, conjectura de Point Carre, é um problema da forma de objetos. Por exemplo, seja uma bola e um anel, seria possível deformar a bola sem cortá-la nem fura – lá e transformá-la num anel? Claro que não! O anel tem furo. É este o problema que Point Carre desejava resolver no caso de quatro dimensões. Este problema, se pode parecer abstrato e de solução inútil, tem implicações seriíssimas no projeto e produção de circuitos integrados tais como os micro processadores que dão vida aos nossos computadores, nos transportes, e finalmente a compreensão do funcionamento do cérebro cuja forma das ligações neuronais (costuma-se reservar a palavra neural para neurônios artificiais) implicam na compreensão do funcionamento do cérebro.

A conjectura de Birch-Swinnerton-Dyer diz respeito a possíveis soluções de equações que coeficientes e soluções são números inteiros. Trata-se da generalização dos problemas tratados pelo matemático grego Diofantos. Mais uma vez, este problema tem aparência de ser de matemática pura e isto significa a matemática movida por um sentimento de curiosidade e de estética. Entretanto, na maioria das vezes esses problemas abstratos abrem idéias novas e permitem resolver importantes problemas práticos.

O último dos problemas, ou conjectura de Hodge, é tentar responder a pergunta de como aproximar a forma de um objeto a partir de peças geométricas simples. O livro descreve esses problemas em uma linguagem agradável ao leitor sem uma formação matemática que vá além de curso secundário. Os primeiros capítulos apresentam, inclusive, alguns conceitos matemáticos, estudados em cursos elementares com figuras, exemplos e também com apoio histórico. A apresentação é agradável e um ponto alto do livro é que a tradução é bem cuidada e isenta de anglicismos tão comuns nos

dias de hoje. Recomenda-se a todos aqueles que fazem uma atividade de informática por vocação, e que estão realmente interessados em evoluir no conhecimento científico. O livro termina com sugestões de leituras complementares, que infelizmente, para o leitor brasileiro desconhecedor do inglês, são de pouca valia, pois são todos em inglês. Precisamos ter bons textos científicos com um vernáculo bem
cuidado, isento de estrangeirismos, para que possamos ter, realmente, uma tecnologia nacional.

A influência de Hilbert é considerável. Ao lado de suas descobertas notáveis, o tipo de atitude assumida atrai a adesão intelectual dos que examinam suas obras. Hilbert está sempre em busca da estrutura lógica mais íntima dos problemas, tentando real compreensão das questões que estuda. Age com grande probidade e rigor, visando a uma unificação de conhecimentos. Como afirma Dieudonné, "ele encarna, para a geração "entre-guerras", o verdadeiro ideal do matemático".

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Rowe, David; Gray, Jeremy J. (2000). *The Hilbert Challenge*. Oxford University Press

Yandell, Benjamin H. (2002). *The Honors Class. Hilbert's Problems and Their Solvers*. A K Peters.