

UNIVERSIDADE TIRADENTES

**CRISTIANO SANTOS OLIVEIRA
SAULO VIEIRA**

**AS DIFICULDADES NO ESTUDO DA
TRIGONOMETRIA NO COLÉGIO ESTADUAL JOANA
DE FREITAS BARBOSA**

**Propriá
2008**

**CRISTIANO SANTOS OLIVEIRA
SAULO VIEIRA**

**AS DIFICULDADES NO ESTUDO DA
TRIGONOMETRIA NO COLÉGIO ESTADUAL JOANA
DE FREITAS BARBOSA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado à Universidade Tiradentes
como um dos pré-requisitos para a
obtenção do grau de Licenciatura em
Matemática.

Prof. Esp. Carlos Roberto Bastos Souza.

Propriá
2008

**CRISTIANO SANTOS OLIVEIRA
SAULO VIEIRA**

**AS DIFICULDADES NO ESTUDO DA TRIGONOMETRIA NO
COLÉGIO ESTADUAL JOANA DE FREITAS BARBOSA**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Matemática da
Universidade Tiradentes – UNIT, como
requisito parcial para obtenção do grau
de Licenciatura em Matemática.

Aprovado em ____/____/____.

Banca Examinadora

Orientador: Prof. Esp. Carlos Roberto Bastos Souza
UNIVERSIDADE TIRADENTES

Examinador(a)
UNIVERSIDADE TIRADENTES

AGRADECIMENTOS

A realização deste trabalho só foi possível graças:

A Deus que nos propicia tantos momentos de sabedoria.

Aos nossos amigos pelo dia-a-dia de cumplicidade e luta.

Aos nossos pais por toda uma vida de dedicação.

A nossas esposas pela compreensão e ajuda ao longo do curso.

Aos professores orientadores que ofereceram subsídio para o desenvolvimento deste trabalho.

A vida é bela para duas coisas: aprender matemática e depois ensiná-la.

Poisson

RESUMO

A Trigonometria é um assunto que surgiu da necessidade de buscar novas ferramentas para auxiliar os antigos astrônomos; atualmente, além de servir à Astronomia, também serve de base para outras áreas do conhecimento, pois encontramos a Trigonometria na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina, e até na Música. Portanto, é necessário e de suma importância uma busca de aperfeiçoamento no ensino deste assunto. Este trabalho foi elaborado a fim de verificar as dificuldades de ensinar e de aprender Trigonometria no Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa, como uma forma de contribuição para a redução das deficiências do processo de ensino-aprendizagem e na tentativa de conscientizar os professores a buscarem novos métodos para que possam ajudar os alunos na assimilação e acomodação dos conteúdos. Sugerimos novas idéias para que o ensino se torne mais atraente, e que desperte a curiosidade do educando. Como também, que haja uma reflexão sobre novas alternativas para reavivar no aluno a motivação. Abordamos a Trigonometria desde sua origem até os dias atuais para que pudéssemos diagnosticar melhor as técnicas que são desenvolvidas em sala de aula, verificando a real eficiência destas técnicas na criação de pontes entre os conteúdos e a percepção dos alunos. Para a elaboração deste trabalho realizamos inicialmente a fase exploratória, através de um estudo bibliográfico, e por último, a realização de uma pesquisa através da utilização do método estatístico, com instrumento de coleta de dados, aplicando-se questionários fechados, tanto para os alunos quanto para os professores. Relatamos sobre nosso ponto de vista através da análise dos resultados que obtivemos com os dados contidos nas respostas dos questionários. Reconhecemos a complexidade que existe em um sistema público de ensino, bem como as dificuldades enfrentadas por educandos e educadores. Percebemos que o estudo da Trigonometria está muito precário, necessitando de recursos e materiais adequados. Como os resultados foram

obtidos sobre a ótica dos alunos e dos professores, constatamos que os indivíduos estão totalmente presos aos problemas e não conseguem visualizar estratégias que possibilitem buscar soluções. Aliás, ficam estritamente preocupados em apontar os erros e não os meios necessários para se chegar aos acertos. No entanto, queremos levar aos educadores e educandos uma maior conscientização da importância de estudar os conteúdos de forma a propiciar uma produção de conhecimento para a vida. E que nesta forma de produção, o aluno possa adquirir ferramentas necessárias para desenvolver suas competências e habilidades e assim, interligar os antigos com os novos conteúdos. Portanto, além de considerarmos de grande valia todo este trabalho realizado, o mesmo, nos propiciou novas reflexões em relação aos nossos propósitos como futuros educadores, como também, proporcionamos pequenas contribuições que poderão servir para a escola e, principalmente, para o professor, de forma a subsidiar a construção de um novo processo de ensino-aprendizagem. Também sugerimos que outros pesquisadores desenvolvam estudos mais aprofundados em relação ao tema exposto, com objetivo de detectar outras falhas e, ao mesmo tempo, complementar este nosso trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Trigonometria; História-Contemporaneidade; Ensino-Aprendizagem.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Conceito Atribuído pelo Aluno ao Conteúdo de Trigonometria	44
Tabela 2: Percepção do Aluno Quanto a Abordagem do Professor em Relação à Origem da Trigonometria	45
Tabela 3: A Forma que o Professor Explica o Conteúdo	46
Tabela 4: A Atitude do Professor em Relação às Dúvidas no Ensino de Trigonometria	47
Tabela 5: Os Materiais usados pelo Professor no Ensino de Trigonometria	48
Tabela 6: Método usado pelo Professor no Ensino de Trigonometria	49
Tabela 7: Quanto à Forma com que os Livros Didáticos Contribuem para o Estudo de Trigonometria	50
Tabela 8: Conceito Atribuído pelo Professor ao Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	52
Tabela 9: A Importância de Contextualizar a História da Trigonometria no Ensino da mesma	53
Tabela 10: Frequência que o Professor usa a História e Contribuição dos Antigos Matemáticos no Ensino de Trigonometria	54
Tabela 11: Fator que Interfere mais no Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	55
Tabela 12: Fator que Contribui mais para o Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	56
Tabela 13: Grau de Facilidade de Contextualizar a Trigonometria com as Novas Tecnologias e o dia-a-dia do Aluno	57

LISTA DE ANEXOS

Anexo A – Questionário-Aluno	64
Anexo B – Questionário-Professor	66

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA	14
2.1 O Professor e o Processo Ensino-aprendizagem de Trigonometria	14
2.2 A História da Trigonometria como Fonte de Recurso Didático	21
2.2.1 A Gênese da Trigonometria	21
2.2.2 O Desenvolvimento da Trigonometria	25
2.2.2.1 A Trigonometria na Grécia	25
2.2.2.2 A Contribuição dos Hindus	32
2.2.2.3 A Trigonometria dos Árabes	35
2.2.2.4 A Trigonometria na Europa a partir do Século XV	37
3 METODOLOGIA UTILIZADA NA PESQUISA	43
4 ANÁLISE DO ENSINO-APRENDIZAGEM ATRAVÉS DE DADOS	44
4.1 Resultados obtidos sob a ótica dos alunos	44
4.1.1 Conceito Atribuído pelo Aluno ao Conteúdo de Trigonometria	44
4.1.2 Percepção do Aluno Quanto a Abordagem do Professor em Relação à Origem da Trigonometria	45
4.1.3 A Forma que o Professor Explica o Conteúdo	46
4.1.4 A Atitude do Professor em Relação às Dúvidas no Ensino de Trigonometria	47
4.1.5 Os Materiais usados pelo Professor no Ensino de Trigonometria	48
4.1.6 Método usado pelo Professor no Ensino de Trigonometria	49

4.1.7 Quanto a forma com que os Livros Didáticos Contribuem para o Estudo de Trigonometria	50
4.2 Resultados obtidos sob a ótica dos Professores	51
4.2.1 Conceito Atribuído pelo Professor ao Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	52
4.2.2 A Importância de Contextualizar a História da Trigonometria no Ensino da mesma	53
4.2.3 A Frequência que o Professor usa a História e Contribuição dos Antigos Matemáticos no Ensino de Trigonometria	54
4.2.4 Fator que Interfere mais no Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	55
4.2.5 Fator que Contribui mais para o Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria	56
4.2.6 Quanto ao Grau de Facilidade de Contextualizar a Trigonometria com as Novas Tecnologias e o dia-a-dia do Aluno	57
5 CONCLUSÃO	58
REFERÊNCIAS	62
ANEXOS	64

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objeto de estudo o ensino da trigonometria no Ensino Médio do Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa na cidade de Propriá – SE, para entendermos quais os problemas que o colégio e, principalmente, os professores de matemática enfrentam em seu dia-a-dia ao passarem esse conteúdo que na maioria das vezes se torna difícil para os alunos, fizemos uma avaliação do que se passa no ensino e no aprendizado da trigonometria.

Escolhemos o tema porque a trigonometria é um assunto longo, complicado e pouco desenvolvido nas escolas públicas de nosso País. É de suma importância buscar saber quais os principais problemas encontrados em nossas salas de aula em relação ao tema citado, pois se pudermos compreender melhor quais os principais erros e quais são as dificuldades enfrentadas pelos atuais professores poderemos, assim, ter uma visão crítica para quando esses problemas surgirem, possam ser enfrentados pelos futuros educadores. Optamos fazer este trabalho no Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa por ser uma escola pública, sabendo que esta análise apesar de ser efetuada na cidade supracitada, tem um caráter universal, já que, os conteúdos matemáticos que são considerados, em sua maioria, como complicados, poderão ter diagnósticos do ponto de vista de várias pessoas e sobre diversos aspectos.

Desta forma, podemos, através da pesquisa, verificar quais são as dificuldades que os professores têm em passar o conteúdo programático; averiguar quais as dificuldades que os alunos têm em aprender a trigonometria; identificar se os métodos são clássicos ou inovadores para que o conteúdo trigonométrico seja melhor absorvido; verificar se os materiais didáticos usados no Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa são interessantes para o aprendizado deste assunto.

Para desenvolvermos este trabalho foi fundamental a utilização de caminhos que viabilizaram o sucesso das novas perspectivas com relação ao ensino da trigonometria. Neste contexto, surgiram questões que nortearam o estudo do tema, a saber:

- Os educadores devem ser os primeiros a encarar a trigonometria como um assunto interessante e importante, e que isso seja transmitido aos alunos com bastante entusiasmo.

- Os professores do Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa precisam incentivar o aluno para que ele se veja capacitado em encarar a trigonometria como outro assunto matemático.

- A trigonometria deve ser aplicada com métodos práticos, com exemplos do cotidiano, para que o aluno perceba a sua importância e o estimule a sentir prazer em querer aprender.

- O material didático deve ser apropriado e bem elaborado para melhor compreensão, e, além disso, os professores ao ensinar trigonometria devem estar a par dos obstáculos vividos pelos matemáticos no passado para melhor compreender as dificuldades dos alunos de hoje.

- Os assuntos trigonométricos devem ser apresentados aos alunos com muita calma e paciência, para que os mesmos, tirem todas as dúvidas, não ficando subentendidos que podem atrapalhar o aprendizado e resultar em desinteresse durante o curso.

A matemática apresenta em todas as partes do mundo os mesmos problemas, os quais podem ser analisados por dois ângulos: algumas vezes podem ser as técnicas do professor em apresentar a matéria, e em outras, a forma em que o aluno percebe o conteúdo que está sendo passado, ou seja, a maneira como ele observa a matéria. Muitos alunos ingressam com aquela impressão de que é algo difícil de compreender e isso facilita o não aprendizado do conteúdo. Seria importante que a trigonometria fosse aplicada de maneira

prática, com livros bem explicativos ou até com um rico acervo que contenha várias visões interpretativas de autores diversificados, contribuindo assim, para melhor compreensão do conteúdo.

Para tal, tratamos no primeiro capítulo, do “Processo Ensino-Aprendizagem de Trigonometria”, onde nos reportamos aos primeiros trabalhos envolvendo o uso da trigonometria e também como os matemáticos dos séculos passados conseguiam vencer os obstáculos encontrados durante o desenvolvimento de novos métodos para o uso e entendimento da trigonometria.

No segundo capítulo, fizemos uma explanação sobre a “Metodologia” aplicada na pesquisa.

No terceiro capítulo, realizamos uma “Análise dos Resultados” obtidos através da coleta de dados.

E, por fim, a “Conclusão” da pesquisa onde estão as respostas às nossas questões norteadoras, bem como as principais contribuições deste trabalho.

2 PROCESSO ENSINO-APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA

2.1 O Professor e o Processo Ensino-Aprendizagem de Trigonometria

Em nossas escolas existem disciplinas educacionais relacionadas a todos os assuntos sejam eles: teóricos, históricos, e geográficos. Existe uma disciplina na qual aprendemos como a nossa língua e a nossa escrita funcionam, relacionando este último caso a nosso país e nossa cultura que é a conhecida Língua Portuguesa. Também existe a considerada mais difícil, que é a matemática, a qual está relacionada ao nosso universo, pois as fórmulas e cálculos matemáticos são os mesmos, mudando apenas a ordem e a maneira de ser apresentada.

Segundo os PCNs do Ensino Médio, “as disciplinas dessa área [Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias] compõem a cultura científica e tecnológica que, como toda cultura humana, é resultado e instrumento da evolução social e econômica, na atualidade e ao longo da história”. É necessário neste caso procurar as melhores e mais variáveis técnicas possíveis para que o conteúdo seja absorvido por aqueles que têm ou não facilidade em perceber tal assunto, pois em uma escola ou em uma sala de aula para sermos mais específicos, temos pessoas diferentes que enxergam as coisas de uma forma diferente.

De um modo geral as dificuldades de ensinar e aprender trigonometria estão relacionadas a um conjunto de fatores, tais como: família, sociedade, escola e aluno. Pois, os alunos chegam às escolas trazendo problemas de suas casas, outros trazem problemas de seus empregos, e isso acaba influenciando em sua vida educacional. Muitos não conseguem conciliar trabalho e escola, e acabam optando por desistir dos estudos, pois suas dificuldades

em alcançar as médias são grandes, e o maior índice de notas baixas é exatamente em matemática, e isto também pode está relacionado a fatores como aprendizagem, interesse e vocação.

Neste sentido, o professor deverá auxiliar o aluno com relação a essas adversidades, como se observa,

As visões de mundo que estão contidas nos conteúdos também são assimiladas pelos educandos, na medida mesma em que assimilam os conteúdos. Os livros didáticos, as lições, os textos contêm em si determinados valores, ou modos de ver o mundo, que são assimilados junto com os conteúdos. Os educadores deverão estar atentos criticamente a esses valores, de tal forma que possam discuti-los com os educandos. São visões de família, pátria, trabalho, economia, religião, relação homem/mulher, relação entre etnias etc (LUCKESI, 2006, p. 128).

Esse contexto apresentado por Luckesi (2006) está muito presente na produção dos livros didáticos, já que, a maioria dos autores desses livros está em regiões bem diferentes das regiões onde os livros didáticos se destinam e, por isso, os alunos acabam recebendo material didático com exemplos que não condiz com sua realidade. Desta forma, surgirá no primeiro instante a dificuldade de compreender os exemplos contidos no livro e depois a necessidade de assimilar a relação que existe entre o conteúdo ensinado e os exemplos.

Assim sendo, devemos tentar compreender todos os fatores que levam a trigonometria a não ser compreendida e buscar os melhores métodos ou técnicas; com isso, alguns alunos desenvolveram vários aspectos positivos decorrente dessas mudanças, devido a renovação na forma de ensinar trigonometria, fatos importantes que podemos analisar e desenvolver no futuro, a exemplo de Thaís (2006), estudante, quando cita alguns aspectos:

Aspectos Positivos: a divisão de horários com conteúdos diferentes tornou o trabalho menos cansativo. Os trabalhos propostos renderam mais. O módulo

Trigonometria foi o que melhor correspondeu às nossas expectativas até o momento devido às discussões de "como" abordar de forma diferente e mais eficiente o conteúdo com os alunos. Aspectos Negativos: alguns tópicos foram abordados de uma forma considerada pelo grupo como impraticável em sala de aula. Só se enfatizou o aperfeiçoamento dos conceitos (o que é importante), porém não tivemos a oportunidade de trabalhar com a “programação de ambientes de aprendizagem”(THAÍS..., 2006).

Como neste exemplo, podemos observar que existem sempre estratégias que viabilizem o processo de ensino-aprendizagem e, neste caso, a preparação deste processo envolvendo educadores e educandos é de suma importância, pois conseguiremos assim uma melhor resposta quando for determinada a execução do planejamento escolar.

É necessária uma busca de aperfeiçoamento no ensino deste assunto que é base para tantas coisas, pois podemos encontrar trigonometria na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina, na Astronomia e até na Música. Por exemplo, a trigonometria do triângulo retângulo nos permite realizar facilmente cálculos como: altura de um prédio através de sua sombra; distância a ser percorrida em uma pista circular de atletismo; medida do raio da Terra; distância entre a Terra e a Lua; largura de rios, montanhas etc. Por isso, Costa (2003), descreve em uma matéria na Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, a respeito da importância do conhecimento sobre como e porque do surgimento de um novo conceito e quais as transformações e evoluções por ele sofridas, fala da relevância de conhecermos os obstáculos vividos pelos antigos matemáticos para compreendermos os obstáculos de hoje quando diz em seu discurso:

A análise desses obstáculos vividos pelos matemáticos no passado nos ajuda a compreender as dificuldades dos alunos de hoje, e por outro lado, o nosso entendimento da própria história e evolução da Matemática pode ser aplicado a partir da análise dos erros e embaraços dos estudantes. O saber matemático dar-se-á quando a matemática for trabalhada de forma criativa, crítica e contextualizada. O o que, e o como fazer precisam ser repensados tendo-se em vista para que e o quando fazer Educação Matemática (COSTA, 2003, p. 59).

Isto significa que ao ensinar Trigonometria, o professor terá que perceber quando deverá prosseguir com o assunto ou insistir na explicação usando técnicas diferentes, pois da mesma forma que existiram dificuldades entre os antigos matemáticos, não será o aluno que agora terá a responsabilidade de assimilar todas as demonstrações já prontas, onde estas foram revisadas ou modificadas por muitos matemáticos ao longo da história.

O conteúdo deve ser ensinado de maneira atraente e as técnicas ou métodos são claramente essenciais para a utilização efetiva da trigonometria. Mostrar como ela foi formada, onde ela é usada, para que serve, e com exemplos práticos. Podemos utilizar no ensino de Trigonometria as formas geométricas da própria sala de aula, a exemplos: de portas, janelas, paredes, formas do telhado etc. Podemos também recriar os lugares geométricos ou ferramentas utilizadas pelos antigos matemáticos. A professora Lea da Cruz Fagundes (2006), chama este material de Materiais Concretos, e ela diz o seguinte a respeito deles:

A utilização de materiais concretos deve ser organizada de modo a propiciar a cada aluno situações de experiências físicas, bem como situações de experiências lógico-matemáticas, onde ele possa realizar tanto abstrações empíricas quanto abstrações reflexivas, levando cada aluno a perceber a importância da matemática e como ela fica interessante quando estuda de forma atraente (FAGUNDES..., 2006).

Neste contexto, o aluno terá a capacidade de refletir sobre o assunto e tirar conclusões que o ajudará na assimilação.

O educando precisa ter experiências dentro da área trigonométrica que sejam marcantes para o seu dia-a-dia. A aula deve ser transmitida de maneira dinâmica, para que se perceba a importância dela para a vida. Tendo experiências físicas e abstratas, e isto depende do educador. Sabemos que utilizar materiais numa metodologia ativa é muito mais trabalhoso para o professor, além de exigir-lhe uma formação bem mais específica, e se torna muito mais

difícil quando esse professor ensina em escolas públicas, como a Escola Estadual Joana de Freitas Barbosa, situada na cidade de Propriá, pois nessas escolas o investimento em recursos técnicos é pouco, e até mesmo o investimento no educador não é dos melhores, fazendo com que muitos não se sintam estimulados para desenvolver um bom trabalho. Mas é preciso, com muita determinação, vencer esses obstáculos.

O professor Costa (2003), deixa uma mensagem interessante para os professores, que diz o seguinte:

Ao ensinar trigonometria, de alguma forma se discutam com os alunos questões que os levem a perceber que o conhecimento matemático não caiu do céu ou surgiu pronto e acabado e que talvez a evolução possa ser acompanhada e alguma parte do caminho feita com eles (COSTA, 2003, p. 68).

Neste sentido, deve-se contextualizar o conteúdo de Trigonometria de forma a propiciar a percepção do aluno, mostrando a necessidade e uso da trigonometria desde a antiguidade até os dias atuais.

A matemática, apesar de abstrata, pode ser estudada de forma concreta através de várias questões do nosso dia-a-dia, como por exemplo, os cálculos que são feitos em empresas e até mesmo nas feiras livres entre pessoas que tenham conhecimento formal ou científico e pessoas que talvez nunca tenham estudado de maneira formal tal conteúdo, mas aprendeu veemente como se fazem as quatro operações, porém quando estas pessoas vão a uma sala de aula e se vêem obrigadas a contextualizar o que elas conseguem fazer muito bem em suas atividades laborais, essas pessoas não conseguem ter um bom desempenho; para elas, o que o professor está falando é muito difícil de compreender e muitas vezes os professores não

conseguem observar as suas próprias dificuldades e nem percebem a necessidade de inovação, como cita a educadora Muller(2007):

Como professora de matemática, observamos que este é um profissional com dificuldades nas questões que se referem às mudanças e inovações. Não pretendemos, com este trabalho, criticar o papel do professor ou suas atitudes, mas sim apontar a realidade deste profissional, suas dificuldades e limitações, seus interesses e preocupações, para servir de instrumento na busca de soluções (MULLER..., 2007).

Desta afirmação podemos ressaltar que o processo ensino-aprendizagem não depende somente do professor já que existem vários outros fatores que contribuem ou interferem neste processo. Também vale salientar que o professor foi ou continua sendo aluno de um sistema educacional repleto de contradições.

No nosso dia-a-dia existem várias mudanças e grandes avanços, e muitos desses avanços se deram graças à matemática como comenta o russo Okounkov para a revista Veja quando fala a respeito do principal desafio da matemática:

Ela ainda deve avançar para se prestar a um papel fundamental: prever desastres naturais. Acredito que logo chegará lá. Digo isso com base na história. Todos os avanços científicos e tecnológicos se devem à matemática. Não se pode dissociá-la do progresso humano. Sem a matemática não teríamos luz elétrica nem computador. Estaríamos ainda vivendo como nos tempos das cavernas. (REVISTA VEJA, 2007, p.81)

A trigonometria deve ser apresentada como algo possível de se compreender se houver desempenho de ambos os lados. Tem que existir a vontade de ensinar, e ensinar bem, e a vontade de aprender, e aprender bem. O problema é que o professor geralmente apresenta dificuldades de material e lugar adequado, e os alunos reclamam da complexidade com que os

assuntos são apresentados, vindo com isso o desinteresse pela disciplina. Okounkov comentou também o seguinte para a revista *Veja* a respeito dos problemas enfrentados:

O problema é que ela [matemática] é apresentada desde cedo nas escolas como uma disciplina a anos-luz da realidade, quando está justamente, na alma da vida moderna. As pessoas não param para pensar que há uma matemática por trás do MP3 ou do celular que usam todo dia. A tecnologia dos aparelhos é uma aplicação de regras da matemática pura operada por computadores. É tudo sincronizado e perfeito. Isso não é interessante? Claro que sim. Mas ainda se subestima a capacidade humana para compreender raciocínios matemáticos mais complexos – e por isso as pessoas ficam privadas das maravilhas dessa ciência. (REVISTA VEJA, 2007, p. 79)

Neste contexto, o educador deve despertar no aluno o interesse pela disciplina, criando situações que possam favorecer o processo de construção do conhecimento do aluno. Athayde (2007), estudante, diz o seguinte:

Portanto, deve-se prestar mais atenção em como será aplicada à matéria em sala de aula, para que os alunos criem interesse em aprender, não apenas interesse, mas uma coisa que acho de extrema importância na matemática é a curiosidade, se conseguirem desenvolver a curiosidade, despertar o famoso "por quê???", encontraram finalmente uma forma de aplicar a matemática para que os alunos realmente aprendam (ATHAYDE..., 2007).

Na medida em que o professor aguça a curiosidade do aluno, obviamente deverá também atender às suas expectativas, pois se é mostrado ao aluno uma coisa nova e quando o mesmo questiona a respeito desta novidade, deverá receber explicações convincentes, de outra forma, a curiosidade pode perecer.

Entretanto, é preciso que o educador esteja também interessado em instigar o aluno, conforme afirma Luckesi (2006),

Tanto do ponto de vista do sistema educativo (governos federal, estadual e municipal) quanto do educador “é preciso estar interessado em que o educando aprenda e se desenvolva, individualmente e coletivamente”. A nosso ver, esse é um princípio político-social importante da atividade educativa escolar (LUCKESI, 2006, p. 121).

Desta forma o professor não poderá jamais perder seu objetivo em quanto profissional de educação, que é o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Portanto, é necessário que haja uma reforma na maneira em que a matemática vem sendo transmitida, em especial o conteúdo de trigonometria, para que os alunos tomem prazer em descobrir os resultados e consigam ver a sua importância, pois ela se encontra em todas as partes em que temos formas geométricas, por exemplo, uma escada encostada em uma parede formando um ângulo, onde o aluno perceberá, através da aplicação da teoria, as várias relações existentes, que poderá acontecer de forma muito divertida, pois a matemática tem um papel fundamental no resgate da cidadania e precisamos fazer com que os alunos construam e se apropriem do conhecimento, compreendendo e transformando sua realidade.

2.2 A História da Trigonometria como Fonte de Recurso Didático

2.2.1 A Gênese da Trigonometria

Para que o processo ensino-aprendizagem da trigonometria tenha sucesso entre nossos atuais educandos é preciso, entre outros fatores, voltar ao passado e analisar como os antigos matemáticos construíram métodos e técnicas para a construção de todas as contribuições que a trigonometria nos oferece, bem como verificar os obstáculos encontrados no desenrolar de todos esses métodos e modelos que encontramos hoje bem mais lapidados.

Para Luckesi é preciso respeitar a cultura do indivíduo e seu processo de assimilação,

A cultura é uma construção que a humanidade vem elaborando ao longo do tempo, assumindo características específicas em cada época histórica assim como em cada espaço geográfico. Dentro dessa construção, cada ser humano nasce, cresce e morre. Cada um e a coletividade assimilam, reproduzem e renovam essa herança; é por meio do processo de assimilação, reprodução e renovação da cultura que os indivíduos, como sujeitos, e a humanidade, como um todo, se desenvolvem e caminham (LUCKESI, 2006, p. 129).

Neste sentido, o professor não deverá mostrar o conteúdo totalmente pronto, mas deverá mostrar suas fases para que o aluno tenha o poder de entender as etapas pelas quais cada informação ou conteúdo teve de percorrer para chegar a uma determinada conclusão.

A trigonometria estudada atualmente teve origem no século XVII, após o desenvolvimento do simbolismo algébrico. Mas a geometria acoplada à Astronomia tem sua origem atrelada aos trabalhos de Hiparco, no século II a.C., embora existam traços anteriores de seu uso. Se considerarmos, ainda, para significar literalmente as relações com as medidas do triângulo, a origem será no segundo ou terceiro milênio antes de Cristo.

Para Eves (2004) a trigonometria teve várias origens e estas não são precisas,

As origens da trigonometria são obscuras. Há alguns problemas no papiro de Rhind que envolvem a co-tangente de um ângulo diedro da base de uma pirâmide [...], a tábua cuneiforme babilônica Plimpton 322 contém, essencialmente, uma notável tábua de secantes. Os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica (EVES, 2004, p. 202).

Esta informação pode ser usada como uma grande explicação em sala de aula, pois a trigonometria é bastante usada na viação aérea, no lançamento de foguetes, na observação do espaço etc., possibilitando uma maior precisão nos cálculos de distância entre aviões, trajetória de foguetes, movimentos dos planetas e demais observações em terra e no espaço. E conforme a afirmação de Eves, a trigonometria nasceu da astronomia e hoje a

trigonometria tem um grande papel na astronomia.

Neste entendimento, a ação do educador em contextualizar os conteúdos matemáticos irá amenizar as dificuldades encontradas pelos alunos em relação à compreensão do assunto abordado em sala de aula, pois os alunos poderão recriar todos os métodos apresentados pelo professor, como também, poderão transformar mediante a própria necessidade, conforme explica Libâneo (1994),

Através da ação educativa o meio social exerce influência sobre os indivíduos e estes, ao assimilarem e recriarem essas influências, tornam-se capazes de estabelecer uma relação ativa e transformadora em relação ao meio social. Tais influências se manifestam através de conhecimentos, experiências, valores, crenças, modo de agir, técnicas e costumes acumulados por muitas gerações de indivíduos e grupos, transmitidos, assimilados e recriados pelas novas gerações (LIBÂNEO, 1994, p.17).

Sendo assim, o ser humano tem a capacidade de observar o todo do qual faz parte e tirar subsídios para a sua própria sobrevivência, ao mesmo tempo contribui para que seu semelhante possa também buscar o próprio sustento.

A trigonometria, como os outros ramos da matemática, não foi obra de um só homem – ou nação. São grandes contribuições dos egípcios, babilônios, gregos, hindus, árabes, persas e europeus. Estas contribuições foram se encaixando durante séculos, nada ocorreu tão rapidamente, pois a maioria das idéias surgira praticamente isolada nas reflexões de cada indivíduo, porém com o passar do tempo alguns indivíduos mostravam seus feitos para outros e ali começavam inúmeras decisões. Existiam tantas obras independentes que quando comparadas percebiam-se inúmeras semelhanças, conforme se observa em dois momentos,

[Ptolomeu] Usou um teorema de *Os elementos* XIII.9 [obra de Euclides] que mostra que um lado de um pentágono regular, um lado de um hexágono regular, e um lado de um decágono regular, todos inscritos num mesmo círculo, constituem os lados de um triângulo retângulo. Incidentalmente, esse mesmo teorema de Euclides fornece a justificação para a elegante construção dada por Ptolomeu de um pentágono regular inscrito num círculo (BOYER, 1996, p. 114).

E ainda:

Na construção de pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces e pode ter sido essa preocupação a levar os egípcios a introduzir um conceito equivalente ao de co-tangente de um ângulo. Na tecnologia moderna é usual medir o grau de inclinação de uma reta por uma razão entre segmentos verticais e horizontais que é recíproca da usada no Egito (BOYER, 1996, p. 13).

Através destas afirmações, podemos perceber que a história mostra que os matemáticos criavam e recriavam de forma independente e também de forma dependente, ou seja, os conhecimentos produzidos por alguns serviram de pontes para conclusões de outros. Como também, os métodos utilizados no passado estão sendo ajustados para a adequação às novas tecnologias. Por isso, a transmissão de conhecimentos deve ser de forma sistemática para que as construções já formadas sirvam de ponto de partida para a produção ou revisão de conhecimentos.

Desta forma a matemática propicia instrumentos para que os indivíduos produzam novos saberes, conforme explica Libâneo,

[A] matemática – cumpre dois objetivos básicos: o desenvolvimento de habilidades de contagem, cálculo e medidas, tendo em vista a resolução de problemas ligados à vida prática cotidiana e tarefas escolares; o desenvolvimento de estruturas lógicas do pensamento, pelo domínio e aplicação dos conteúdos, levando à formação do raciocínio e do pensamento independente e criativo e, assim, instrumentalizando os alunos a adquirirem novos conhecimentos teóricos e práticos (LIBÂNEO, 1994, p. 46).

Sendo assim, o aluno ao estudar matemática poderá desenvolver competências e habilidades que podem ser utilizadas em qualquer área do conhecimento, pois obterá um

pensamento lógico, independente e criativo.

2.2.2 O Desenvolvimento da Trigonometria

A trigonometria desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades práticas, principalmente ligadas à Astronomia, Agrimensura e Navegação. Desta forma iremos analisar algumas contribuições de grandes matemáticos ao longo da história.

2.2.2.1 A Trigonometria na Grécia

A Trigonometria, como os diversos ramos da Matemática, foi evoluindo paulatinamente. O desenvolvimento da trigonometria aconteceu em meio a outros desenvolvimentos de conteúdos matemáticos, porém está intimamente ligado ao da geometria, como se observa,

Teoremas sobre as razões entre lados de triângulos semelhantes tinham sido conhecidos e usados pelos antigos egípcios e babilônios. Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "trilaterometria", ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que "trigonometria", a medida de partes de um triângulo.

.....
 Nas obras de Euclides [...] há teoremas equivalentes a leis ou fórmulas trigonométricas específicas. As proposições II.12 e II.13 de Os *elementos*, por exemplo, são as leis de co-senos para ângulos obtusos e agudos respectivamente, enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica, e são provadas por métodos semelhante ao usado por Euclides para o teorema de Pitágoras (BOYER, 1996, p. 108).

Deste contexto, podemos ressaltar que Euclides desenvolveu muitos trabalhos voltados para a geometria plana, sua obras são tão marcantes que esta geometria passou a ser chamada de geometria euclidiana, Pitágoras também desenvolveu grandes idéias, como a Escola Pitagórica, voltada para a produção de conceitos matemáticos, e o Teorema de

Pitágoras que fora inspirado por suas observações na agrimensura dos egípcios e babilônios. Portanto, nestas obras geométricas foram encontradas relações que fundamentaram também a Trigonometria.

Os matemáticos gregos, também chamados de astrônomos por sua dedicação na área de astronomia, estavam sempre procurando organizar suas idéias, buscavam justificar todas suas observações, e isso se dava através de teoremas,

Os teoremas sobre comprimentos de cordas são essencialmente aplicações da lei dos senos. [...] que o teorema de Arquimedes sobre a corda quebrada pode facilmente ser traduzido em linguagem trigonométrica a fórmulas para senos de somas e diferenças de ângulos. Cada vez mais os astrônomos da idade Alexandrina - notadamente Eratóstenes de Cirene (por volta de 276-194 a.C.) e Aristarco de Samos (por volta de 310-230 a.C.) tratavam problemas que indicavam a necessidade de relações sistematizadas entre ângulos e cordas (BOYER, 1996, p. 108).

Neste sentido, os gregos estavam cientes de suas necessidades e buscavam a produção de conhecimento, neste caso, voltada para Trigonometria, e principalmente, de forma organizada. Pois, os gregos sempre buscavam sistematizar seus feitos, a exemplo das demonstrações dos teoremas.

Por volta do ano 200 a.C., os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua, conforme Boyer (1996),

Aristarco [de Samos], segundo Arquimedes e Plutarco, propôs um sistema heliocêntrico, antecipando-se a Copérnico por mais de um milênio e meio; mas o que quer ele tenha escrito sobre esse assunto se perdeu. Em vez disso temos dele um tratado, talvez escrito antes (cerca de 260 a.C.), *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*, que assume um universo geocêntrico. Nessa obra Aristarco observa que quando a Lua está exatamente meio cheia, o ângulo entre as linhas de vista ao Sol e à Lua difere para menos de um ângulo reto por um trintavos de um quadrante. (A introdução sistemática do círculo de 360° veio um pouco depois.) Na linguagem de hoje isso significa que a razão da distância da Lua para a distância do Sol é $\sin 3^\circ$ (BOYER, 1996, p. 108).

Vejamos que Aristarco propôs um sistema heliocêntrico, mas em sua obra sobre mensuração do Sol e da Lua, usou um universo geocêntrico. Nesta época não tinha tanta coisa ainda conceituada ou formalizada, como mencionou Boyer (1996) em relação ao círculo de 360°. Porém Aristarco precisava continuar com suas observações e calcular os tamanhos do Sol e da Lua, continua Boyer (1996),

Tendo determinado as distâncias relativas do Sol e da Lua, Aristarco sabia que seus respectivos tamanhos estavam na mesma razão. Isso decorre do fato de terem o Sol e a Lua aproximadamente o mesmo tamanho aparente – isto é, subentendem o mesmo ângulo ao olho de um observador na Terra.

.....
Dessa razão Aristarco pôde obter uma aproximação para os tamanhos do Sol e da Lua em comparação com o da Terra. Por observação de eclipses lunares ele concluiu que a largura da sombra lançada pela Terra à distância da Lua era duas vezes a largura da Lua (BOYER, 1996, p. 109).

Aristarco estava necessitando de outras informações para calcular definitivamente os tamanhos do Sol e da Lua, porém o que ele fez foi uma aproximação, que para àquela época já era uma enorme contribuição, de outra forma, a história mostra que as informações que Aristarco necessitava foram produzidas por outros matemáticos, também com suas limitações, como segue,

O que faltava para chegar a uma avaliação dos tamanhos do Sol e da Lua era só uma medida do raio da Terra. Aristóteles tinha mencionado uma estimativa de 60.000 quilômetros para a circunferência da Terra (talvez devida a Eudoxo) e Arquimedes contava que alguns de seus contemporâneos calculavam que o perímetro seria de uns 45.000 quilômetros. Um cálculo muito melhor, e de longe o mais célebre, deveu-se a Eratóstenes, contemporâneo mais jovem de Arquimedes e Aristarco.

.....
Eratóstenes observou que ao meio-dia no dia do solstício de verão o Sol brilhava diretamente para dentro de um poço profundo em Siene. Ao mesmo tempo em Alexandria, tomada como estando no mesmo meridiano e 5.000 estádios ao norte de Siene, verificou-se que o Sol lançava uma sombra indicado que a distância angular do Sol ao zênite era um cinqüentavo de um círculo. Da igualdade [...] é claro que a circunferência da Terra deve ter cinqüenta vezes a distância entre Siene e Alexandria. Isso fornece um perímetro de 250.000 estádios [...], 37.000 quilômetros (BOYER, 1996, p. 110).

Neste trecho mostra claramente que os cálculos matemáticos foram feitos inicialmente por aproximações, e com o passar do tempo, com auxílio de outras informações ou ferramentas, estes cálculos foram aprimorados. Os matemáticos usavam de todos os recursos disponíveis em seu tempo, construía suas demonstrações, principalmente os gregos, utilizando-se de material concreto.

A alta produção de conhecimento na Grécia não foi constante, houve um período de declínio, principalmente em relação à Trigonometria,

Durante cerca de dois séculos e meio, de Hipócrates a Eratóstenes, os matemáticos gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram a uma variedade de problemas de astronomia, mas disso não resultou uma trigonometria sistemática. Então, presumivelmente durante a segunda metade do segundo século a.C., foi compilada a que foi presumivelmente a primeira tabela trigonométrica pelo astrônomo Hiparco de Nicéia (por volta de 180-125 a.C.), que assim ganhou o direito de ser chamado “o pai da trigonometria” (BOYER, 1996, p. 110).

Apesar de ter resolvido alguns problemas de astronomia, os gregos não produziram tanto quanto o período anterior, porém passado esse momento de baixa produção de conhecimentos, logo surgiram novas idéias, principalmente as de Hiparco, que devido as suas imensas contribuições para a Trigonometria foi considerado o pai desta.

As contribuições de Hiparco marcaram a história da Trigonometria, conforme relato de Eves (2004),

O comentador Têon de Alexandria (sec. IV) atribui a Hiparco um tratado em doze livros que se ocupa da construção de uma *tábua de cordas*. Acredita-se que uma tábua de cordas posterior, devida a Cláudio Ptolomeu, que fornece os comprimentos das cordas dos ângulos centrais de Hiparco. Divide-se o raio do círculo em 60 partes e se expressam os comprimentos das cordas sexagesimalmente em termos dessas partes [...]. A maneira de se calcular os comprimentos dessas cordas, explicada elegantemente por Ptolomeu, com toda a certeza era do conhecimento de Hiparco (EVES, 2004, p. 203).

O matemático Hiparco além de produzir belas obras, conseguiu buscar em outras obras conhecimentos fundamentais para o desenvolvimento de seus conceitos trigonométricos,

Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônica e a obra de Ptolomeu. A astronomia florescia na Mesopotâmia, quando em 270 a.C., aproximadamente, Berossos, quase o único astrônomo babilônico conhecido pelo nome mudou-se para a ilha de Cos, e não é improvável que os fundamentos da teoria conhecida no Oriente Próximo tenham sido transmitidos à Grécia nessa época. As principais contribuições à astronomia atribuídas a Hiparco foram organizadas de dados empíricos derivados dos babilônios, a elaboração de um catálogo estelar, melhoramentos em constantes astronômicas importantes (tais como a duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, e o ângulo de inclinação da eclíptica) [...](BOYER, 1996, p. 110).

Neste sentido, Hiparco também conseguiu criar pontes para a produção de conhecimentos entre os babilônios e as obras de Ptolomeu. Desta forma, todo conhecimento bem produzido, organizado, sistemático, como queriam os gregos, tem um valor imenso para a humanidade, pois toda forma de conhecimento deve ser acessível a todos, de maneira igualitária. Porém nem sempre foi assim, alguns matemáticos se preocupam em publicar suas obras, outros ficavam totalmente isolados com suas reflexões, também havia as publicações de obras onde as idéias ali presentes, não era fruto do trabalho do autor, eram apenas compilações autorizadas e até mesmo sem autorização.

Um outro grande matemático grego que contribuiu bastante para o desenvolvimento da Trigonometria foi Cláudio Ptolomeu, autor de uma obra que é considerada a mais importante da Trigonometria da Antiguidade, surgida no século II de nossa era, em Alexandria, a *Syntaxis Matemática*, composta de treze volumes. Ela ficou conhecida como Almagesto, que significa em árabe a maior, pois os tradutores árabes a consideravam a maior obra existente na época em Astronomia, conforme afirmação,

[...] Ptolomeu fez uso do catálogo de posições estelares legado por Hiparco, mas se as tabelas trigonométricas de Ptolomeu derivavam, ou não, em grande parte, de seu reputado predecessor não se pode saber. Felizmente, o *Almagesto* [livro de Ptolomeu] sobreviveu aos estragos do tempo; por isso temos não só suas tabelas trigonométricas mas também uma exposição dos métodos usados em sua construção. De importância central para o cálculo das cordas de Ptolomeu era uma proposição geométrica ainda hoje conhecida como “teorema de Ptolomeu”: se ABCD é um quadrilátero (convexo) inscrito num círculo, então $AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$; isto é, a soma dos produtos de lados opostos de um quadrilátero inscritível é igual ao produto das diagonais [...] (BOYER, 1996, p. 112).

Neste texto, Boyer (1996) evidencia que o livro de Ptolomeu sobreviveu aos estragos do tempo, isso porque muitas obras antigas, sobre vários conhecimentos, foram perdidas ou mal conservadas. Há relatos de que alguns manuscritos antigos foram encontrados abandonados, outros vendidos em feiras livres, sem nenhum zelo, sem nenhuma atenção para as idéias ali contidas. Muitos dos manuscritos hoje presentes nos museus foram resgatados de várias formas.

Em sua obra Ptolomeu contribuiu com várias e importantes idéias, como segue,

Foi a fórmula para o seno da diferença – ou, mais precisamente, corda da diferença – que Ptolomeu achou especialmente útil ao construir suas tabelas. Outra fórmula que lhe foi muito útil foi a equivalente de nossa fórmula para metade do ângulo (BOYER, 1996, p. 113).

Neste trecho, Boyer (1996) usa a expressão seno da diferença, porém enfatiza corda da diferença, pois a primeira expressa não era usada nesta época, somente a segunda. Os termos usados atualmente são denominações adotadas ao longo da história, provenientes de traduções e adequações à linguagem dos povos.

A divisão da circunferência em 360° , tão conhecida em nossos dias, provavelmente tenha sido usada na Grécia. Neste período não se falava em razões trigonométricas e sim, em linhas trigonométricas,

Deve-se lembrar que desde os dias de Hiparco até os tempos modernos não havia coisas como razões trigonométrica. Os gregos, e depois deles os hindus e os árabes, usaram *linhas* trigonométricas.

.....
 A divisão de uma circunferência em 360 graus parece ter estado em uso na Grécia desde os dias de Hiparco, embora não se saiba bem como a convenção surgiu. Não é improvável que a medida de 360 graus tenha sido tomada da astronomia, onde o zodíaco fora dividido em doze “signos” ou 36 “decanatos”. Um ciclo de estações, de aproximadamente 360 dias, podia ser facilmente posto em correspondência como o sistema de signos zodiacais e decanatos [...]. Nosso sistema comum de medida de ângulos pode derivar dessa correspondência. Além disso, como o sistema babilônico posicional para frações era evidentemente superior às frações unitárias egípcias e às frações comuns gregas, era natural que Ptolomeu subdividisse seus graus e, sessenta partes *minutae primae*, cada uma das quais era dividida em sessenta partes *minutae secundae*, e assim por diante. É das frases latinas, que os tradutores usaram, que provêm nossas palavras “minutos” e “segundos” [...] (BOYER, 1996, p. 113).

Esse contexto mostra a provável origem da divisão da circunferência em graus, minutos e segundos, o que é bastante interessante, pois podemos analisar que cada conhecimento fora decorrência de muito estudo, e não apenas para satisfazer vontades próprias de alguns matemáticos. Desta forma, os grandes matemáticos, desde Hiparco a Ptolomeu, embasados em vários conhecimentos, dividiram perfeitamente a circunferência.

Contudo, o período em que a Trigonometria estava em ascensão foi considerado um período sem progresso da produção grega, como se observa,

[...] o período em que a trigonometria e a mensuração adquiriram relevo foi caracterizado pela falta de progresso – se não real o declínio [...] (BOYER, 1996, p. 119).

Apesar da falta de progresso nesta época, se realmente podemos considerar, os gregos conseguiram, de modo geral, produzir excelentes contribuições para a Trigonometria.

2.2.2.2 A Contribuição dos Hindus

A Índia por volta do século V da nossa era, após sofrer várias invasões, chega à dinastia de Gupta e começa a se fortalecer em relação à produção de conhecimento, pouco tempo depois, de maneira anônima, surge uma importante contribuição para a astronomia, como se observa,

O período Gupta revelou-se a era de ouro do renascimento sânscrito; nele a Índia tornou-se um centro de saber, arte e medicina. Desenvolveram-se ricas cidades e fundaram-se universidades. O primeiro trabalho astronômico importante, o anônimo *Surya Siddhanta* (“o conhecimento do Sol”), data desse período e é, provavelmente, do início do século V. Daí para frente a matemática hindu subordinou-se mais à astronomia do que à religião (EVES, 2004, p. 248).

Neste contexto, nota-se a importância das universidades como um ambiente de produção e socialização do saber. Observamos também a dedicação dos hindus pela astronomia, de tal forma que superava a atenção voltada para a religião. Outro fator importante foi o aparecimento da obra *Surya Siddanta*, que de forma anônima, apesar de alguns hindus afirmarem que o autor do texto foi Surya, o Deus do Sol, foi responsável por fundamentar várias outras obras sobre astronomia, conforme Eves (2004),

O trabalho do século VI, *Pañca Siddhantika*, do astrônomo Varahamihira, de Ujjain, baseado no anterior *Surya Siddhanta*, contém um bom sumário da trigonometria hindu antiga e uma tábua de senos aparentemente oriunda de cordas de Ptolomeu (EVES, 2004, p. 248).

Vejamos que o astrônomo Varahamihira além de ser influenciado pela *Surya Siddanta*, provavelmente, fora também influenciado pelas obras de Ptolomeu, podendo ser uma contribuição grega para a Trigonometria hindu, mas a história mostra que os povos

hindus talvez não estivessem atentos à forma da Trigonometria grega, pois esta usava fundamentos da geometria, conforme explicação,

Embora na trigonometria hindu haja traços de influência grega, os indianos não parecem ter tido ocasião de tomar emprestada a geometria grega, preocupados como estavam com simples regras de mensuração (BOYER, 1996, p. 147).

Realmente não era comum o uso das demonstrações pelos indianos, e inexistiam procedimentos postulacionais, pois a sua geometria era largamente empírica.

Com os hindus, as principais funções trigonométricas foram introduzidas e os métodos de tabulação se aperfeiçoaram, eles utilizaram conceitos de semicorda e de seno e demonstraram algumas identidades, como se observa,

Os hindus, como os gregos, consideravam a trigonometria como uma ferramenta para sua astronomia. Eles usavam nossos conhecidos graus, minutos e segundos nas tábuas de senos que construíam. (Isto é, eles construíam tábuas de semicordas e não de cordas, como os gregos haviam construído.) Os hindus empregavam os equivalentes de senos, co-senos e senos reversos (versem $A = 1 - \cos A$). Eles calculavam o seno do ângulo metade através da relação $\text{versen } 2A = 2 \text{ sen}^2 A$. Em sua trigonometria eles resolviam triângulos planos e esféricos [...] (EVES, 2004, p. 259).

Sendo assim, a trigonometria tinha a mesma definição tanto para os hindus quanto para os gregos, porém estes usavam tábuas de cordas, enquanto aqueles usavam tábuas de semicordas.

Os hindus produziram excelentes contribuições para a Trigonometria, porém em comparação à Trigonometria grega podemos verificar algumas diferenças no tocante, ou seja, na forma de produção destas contribuições, conforme explicação,

[...] a matemática hindu era em grande escala uma serva da astronomia [...]. Como resultado do sistema de castas, a matemática na Índia era cultivada quase que exclusivamente por sacerdotes; na Grécia o estudo da matemática estava aberto a todos os que se interessassem pelo assunto. [...] Mesmo a trigonometria hindu, à qual não faltavam méritos, tinha uma natureza aritmética; a essência da trigonometria grega era geométrica. [...] A qualidade da matemática hindu era muito irregular, encontrando-se com freqüência, lado a lado, de bom nível e a de baixo nível; os gregos pareciam ter um sexto sentido que fazia com que distinguissem a boa da má qualidade e a agarrar-se tão-somente àquela (EVES, 2004, p. 259).

Neste trecho, observamos que toda produção de conhecimento matemático na Índia estava atrelada à astronomia. A trigonometria era mais aritmética do que geométrica e não havia o cuidado de publicar apenas os conceitos matemáticos de boa procedência. Outro fator que podemos evidenciar é a forma como a disseminação do saber era tratada na Índia, pois o acesso ao conhecimento não era para todos.

Contudo, as contribuições dos hindus foram de grande valia para o desenvolvimento da Trigonometria e outros ramos da matemática, conforme afirmação,

O desenvolvimento de nosso sistema de notação para os inteiros foi uma das duas contribuições da Índia de maior influência na história da matemática. A outra foi a introdução de um equivalente da função seno da trigonometria para substituir a tabela grega de cordas. As mais antigas tabelas da função seno que se preservam são as do *Siddhantas* e do *Aryabhatiya*. Aqui são dados os senos dos ângulos até 90° [...] (BOYER, 1996, p. 147).

Podemos concluir que apesar de toda uma forma própria de produzir conhecimento, os hindus contribuíram de tal forma que suas contribuições foram acrescentadas ou sobrepostas a tantas outras.

2.2.2.3 A Trigonometria dos Árabes

O Império Muçulmano ou Árabe, além da expansão econômica, viveu extraordinário avanço nos diversos campos das artes e da ciência do fim do século VIII até o século XI, com destaque ao século IX. A expansão do saber muçulmano deveu-se, sobretudo, aos califas de Bagdá que foram governadores comprometidos com o desenvolvimento cultural, como segue,

Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais eminentes para se instalarem junto às cortes. Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram laboriosamente traduzidos para o árabe e assim preservados até que posteriormente intelectuais europeus tivessem condições de retraduzi-los para o latim ou outras línguas. Não fora o trabalho dos intelectuais árabes e grande parte da ciência grega e hindu se teria perdido irremediavelmente ao longo da Baixa Idade Média (EVES, 2004, p. 260).

Desta forma, a preocupação dos árabes de organizar todo conhecimento produzido por eles, pelos gregos e hindus, foi de extrema importância para a conservação e socialização de grande parte da cultura mundial.

Um dos grandes matemáticos árabes foi Abû'l-Wefâ. Ele conseguiu realizar vários trabalhos, entre eles, a tradução e revisão de obras, como também, a produção de grandes avanços nos conceitos trigonométricos, conforme Eves (2004),

Provavelmente o mais ilustre dos matemáticos muçulmanos do século X foi Abû'l-Wefâ (940-998), nascido na região montanhosa persa de Khorâsân. Ele se tornou especialmente conhecido por sua tradução de Diofanto, por ter introduzido a função tangente em trigonometria e por uma tábua de senos e tangentes, com incrementos de 15', que elaborou. Para tanto ele aperfeiçoou o método de Ptolomeu, obtendo sen 30' com nove casas decimais [...] (EVES, 2004, p. 261).

Sendo assim, Abû'l-Wefâ não hesitou em buscar fundamentos em outras obras servindo como base para suas próprias obras. Isto retrata uma característica marcante dos árabes, a de fazer pontes entre os diversos conhecimentos.

Nessa época, o século X, ainda não se usava todas as denominações que conhecemos hoje para os conceitos trigonométricos, porém usavam-se várias denominações para um mesmo conceito, mas alguns séculos depois, os árabes incumbiram-se em realizar alterações nas nomenclaturas, conforme Eves (2004),

Os significados dos nomes atuais das funções trigonométrica, com exceção do seno, são claros a partir de sua interpretação geométrica, quando se coloca o ângulo no centro de um círculo de raio unitário[...]. As funções tangente, co-tangente, secante e co-secante foram conhecidas por vários outros nomes, surgindo esses particulares no máximo até o fim do século XVI (EVES, 2004, p. 266).

Desta afirmação, podemos concluir que o motivo para tantos nomes para uma mesma função trigonométrica está relacionado ao apanhado de várias obras as quais continham contribuições de diversas culturas.

Podemos ressaltar a origem da palavra seno, que segundo Eves (2004), é curiosa, observe,

A origem da palavra seno é curiosa. Aryabhata usava *ardba-jya* (“semicorda”) e também *jya-ardba* (“corda metade”) e por brevidade escrevia apenas *jya* (“corda”). Partindo de *jya* os árabes foneticamente derivaram *jîba* que, devido à prática entre eles de se omitir as vogais, se escrevia *jb*. Afora seu significado técnico, hoje *jîba* é uma palavra que não tem sentido em árabe. Posteriormente, escritores que se depararam com *jb* como abreviação da palavra sem sentido *jîba* passaram a usar *jaib* que faz parte do vocabulário árabe e que significa “enseada” ou “baía”. Mais tarde ainda, ao fazer a tradução de *jaib* para o latim, Gerardo de Cremona empregou o equivalente latino *sinus*, de onde vem nossa palavra atual *seno* (EVES, 2004 p. 267).

Realmente é bastante curiosa a origem da palavra seno, pois envolve a forma como os árabes escreviam e só depois da tradução resultou no termo “seno”. Muitos nomes e palavras usadas hoje em dia remontam ao período árabe.

Portanto, os astrônomos, conforme se consideravam os matemáticos árabes, deixaram grande legado para a Trigonometria, como se observa,

Como os hindus, os matemáticos árabes consideravam-se a si mesmos primariamente astrônomos e assim dedicavam interesse considerável à trigonometria. [...] Pode-se creditar a eles a utilização das seis funções trigonométricas e aprimoramentos na dedução de fórmulas da trigonometria esférica [...] (EVES, 2004, p. 265).

Neste sentido, percebemos que devido à dedicação pela astronomia e a organização das várias obras, estava fadado a culminar em bons feitos, por exemplo, as funções trigonométricas.

Contudo, os árabes nos propiciaram “[...] uma trigonometria cuja substância vinha principalmente da Grécia, mas à qual [...] aplicaram a forma hindu e acrescentaram novas funções e fórmulas.” (BOYER, 1996, p. 164).

2.2.2.4 A Trigonometria na Europa a partir do Século XV

Na Europa do século XV, alguns importantes passos foram dados para o desenvolvimento da Matemática, sob influência principalmente do comércio e seu entorno, como se observa,

A atividade matemática no século XV centrou-se grandemente nas cidades italianas e nas cidades de Nuremberg, Viena e Praga na Europa Central e girou em torno da aritmética, da álgebra e da trigonometria. Assim, a matemática floresceu principalmente nas cidades mercantis em desenvolvimento, sob influência do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura (EVES, 2004, p. 296).

Foi a necessidade que instigou o desenvolvimento de conhecimentos para subsidiar as práticas comerciais, bem como, a produção de instrumentos para a navegação, astronomia e agrimensura. Portanto, na medida em que as cidades cresciam economicamente, precisava-se de novos saberes para manter esta ascensão.

Nesse período surgiram várias contribuições para a Trigonometria, porém, as obras de maiores destaques foram as de Regiomontanus (1436-1476), um dos maiores matemáticos do século XV, cujo trabalho teve grande importância, como segue,

[...] A *Practica geometriae* de Fibonacci e as obras de Bradwardine continham alguns elementos de trigonometria recolhidos de fontes árabes, mas foi só quando Regiomontanus começou a escrever seu *De triangulis* que a Europa adquiriu preeminência nesse campo. Parece que Regiomontanus conhecia a obra de Nasir Eddin, e pode ser essa a origem de seu desejo de organizar a trigonometria como disciplina independente da astronomia (BOYER, 1996, p. 187).

Entretanto, foi através da obra de Regiomontanus que a Europa conseguiu destaque entre as produções voltadas para a Trigonometria. Como também, foi através de seus trabalhos que a Trigonometria começou a ser tratada como disciplina independente da astronomia.

A obra de Regiomontanus, *De Triangulis*, é sem dúvida uma obra riquíssima, pois apresentava vários conceitos de forma clara, partindo das noções fundamentais e aumentando o grau de dificuldade gradativamente, conforme Boyer (1996),

O primeiro livro de *De triangulis*, escrito por volta de 1464, começa com noções

fundamentais, derivadas em grande parte de Euclides, sobre grandezas e razões; vêm a seguir, mais de cinquenta proposições sobre a resolução de triângulos, usando as propriedades dos triângulos retângulos. O segundo livro começa com um enunciado claro e uma prova da lei dos senos, e depois inclui problemas sobre determinação de lados, ângulos e áreas de triângulos planos, das condições determinadas. Entre os problemas, por exemplo, está o seguinte: se a base de um triângulo e o ângulo oposto são conhecidos, e se damos ou a altura relativa à base ou a área, então os lados podem ser determinados. O terceiro livro contém teoremas do tipo encontrado nos antigos textos gregos sobre “esféricos” anteriores ao uso da trigonometria. O quarto livro trata de trigonometria esférica, incluindo a lei esférica dos senos (BOYER, 1996, p. 187).

Neste trecho, percebe-se a preocupação de organizar de forma coesa todas as partes da obra, pois, Regiomontanus usou certa seqüência lógica, apesar de a lógica matemática ter suas origens por volta do século XX.

Vários matemáticos tinham a preocupação de fazer pontes entre as obras de outros autores, ou que suas obras fossem aperfeiçoadas por outros, pois dada à época, sempre havia dificuldades a ser enfrentadas, por exemplo, as frações nas resoluções trigonométricas, conforme explica Boyer (1996),

Revisões de Ptolomeu tinham sugerido a necessidade de novas tabelas, e estas foram fornecidas por diversos astrônomos do século quinze, entre os quais Regiomontanus. A fim de evitar frações era costume tomar um valor grande para o raio de círculo, ou *sinus totus*. Para uma de suas tabelas de senos Regiomontanus acompanhou seus predecessores imediatos usando um raio de 600.000; para outros usou 10.000.000 ou 600.000.000. Para sua tabela de tangentes em *Tabulae directionum* ele escolheu 100.000. Ele não chama a função de “tangente”, mas usa apenas a palavra *numerus* para os valores, grau por grau, numa tabulação com título *Tabula fecunda*. O valor dado para 89° é 5.729,796, e para 90° simplesmente *infinito* (BOYER, 1996, p. 188).

Sendo assim, pode-se afirmar que sempre havia matemáticos preocupados em unificar os conhecimentos, dando seqüência as idéias antigas e executando revisões quando necessárias, pois a construção de conhecimento é um ato contínuo. Mas, com todas essas realizações, Regiomontanus chegou a falecer antes da publicação de suas obras, porém, não deixou de contribuir para o desenvolvimento da Trigonometria, como se observa em Boyer (1996),

A morte súbita de Regiomontanus deu-se antes de serem publicadas suas duas obras trigonométricas, e isso atrasou consideravelmente seu efeito. [...] o tratado mais importante, *De triangulis*, só apareceu impresso em 1533 (e novamente em 1561). No entanto, as obras eram conhecidas em forma manuscrita pelo grupo de matemáticos em Nüremberg, onde Regiomontanus estava trabalhando, e é muito provável que tenham influenciado trabalhos do começo do século dezesseis. (BOYER, 1996, p. 188).

Neste sentido, podemos verificar a força da obra de Regiomontanus, que de forma manuscrita ou publicada após sua morte, contribuiu para o desenvolvimento da Trigonometria no século seguinte.

No século XVI, as contribuições continuaram a aflorar, surgiram outros matemáticos, entre eles, Copérnico, que buscava superar os obstáculos encontrados em seus trabalhos, como segue,

A astronomia contribuiu muito para a matemática; de fato, houve época em que *matemático* significava astrônomo. Dentre os astrônomos que impulsionaram a matemática figura com destaque o polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) [...]. O trabalho de Copérnico necessitava de alguns desenvolvimentos em trigonometria e ele próprio se incumbiu de implementá-los num tratado sobre a matéria (EVES, 2004, p. 313).

É impressionante o que Copérnico fez, buscou soluções para as suas próprias dificuldades e seu tratado foi tão importante que deixou seguidores capacitados e dedicados, entre eles, Rhaeticus, veja,

O principal astrônomo matemático teutônico do século XVI foi o discípulo de Copérnico, Georg Joachim Rhaeticus (1514-1576). Ele dedicou doze anos de sua vida, auxiliado por calculadores remunerados, à construção de duas tábuas trigonométricas notáveis e ainda úteis hoje. Uma delas envolve as seis funções trigonométricas, calculadas com dez casas, para intervalos de $10''$ de arco; a outra é uma tábua de senos, com quinze casas, para intervalos de $10''$ de arco, juntamente com a primeira, a segunda e a terceira diferenças. Rhaeticus foi o primeiro a definir as funções trigonométricas como razões entre lados de um triângulo retângulo. Deve-se à insistência de Rhaeticus o fato de a obra máxima de Copérnico ter sido publicada dramaticamente, com o autor já em seu leito de morte (EVES, 2004, p. 313).

Nesse trecho, ressaltamos a grande relação entre mestre e discípulo, pois Copérnico motivou tanto a dedicação de Rheticus que ele desenvolveu um grande trabalho para a Trigonometria e por fim, insistiu na publicação da magnífica obra de seu mestre.

As obras do astrônomo Copérnico e do matemático Regiomontanus, inspiraram o matemático Viète, que expandiu as tabelas trigonométricas com várias funções e procurou trabalhar melhor as frações nos conceitos da Trigonometria, como se observa,

[...] Viète partiu da obra de seus predecessores, notadamente Regiomontanus e Rheticus. Como o primeiro, ele considerava a trigonometria um ramo independente da matemática; como o segundo ele em geral trabalhava sem referência direta a meias cordas num círculo. Viète no *Cânon mathematicus* (1579) preparou extensas tabelas de todas as seis funções de ângulos aproximados até minutos. Vimos que ele tinha recomendado o uso de frações decimais, em vez de sexagesimais; mas para evitar todas as frações tanto quanto possível, Viète escolheu um “sinus totus” ou hipotenusa de 100.000 partes para as tabelas de seno e co-seno e uma “base” ou *perpendicularum* de 100.000 partes para as tabelas de tangentes, co-tangentes, secantes e co-secantes. (Não usava, porém, esses nomes, exceto quanto à função seno.) (BOYER, 1996, p. 211).

Viète conseguiu desenvolver bastante o assunto, principalmente, aguçar sua atenção para os tipos de frações relacionadas aos conceitos trigonométricos, porém, não foi muito além, devido à necessidade de aprimoramento em alguns tópicos que serviam de subsídios para estes conceitos, como explica Boyer (1996),

Ao aplicar a trigonometria a problemas algébricos e aritméticos Viète ampliava o alcance do assunto. Além disso, suas fórmulas para ângulos múltiplos deveriam ter revelado a periodicidade das funções goniométricas [trigonométricas], mas provavelmente foi sua reticência quanto aos números negativos que o impediu – como impediu seus contemporâneos – de chegar tão longe [...] (BOYER, 1996, p. 213).

Neste contexto, percebe-se que nesta época tinha uma grande dificuldade a ser enfrentada por Viète e seus contemporâneos, o pouco conhecimento dos números negativos. Por isso, Viète ficou impedido de aprimorar muito mais seus trabalhos sobre trigonometria.

Entretanto, no fim do século XVI e início do XVII, houve uma mudança na forma de produção das obras, conforme explicação,

Havia considerável entusiasmo pela trigonometria no fim do século dezesseis e começo do dezessete, mas tomou forma primariamente de síntese e livros didáticos. Foi durante esse período que o nome “trigonometria” veio a ser dada ao assunto. Foi usado como título de uma exposição por Bartholomeus Pitiscus (1561-1613), que foi publicada pela primeira vez em 1595 como suplemento a um livro sobre esféricas e novamente, em separado, em 1600, 1606 e 1612 [...] (BOYER, 1996, p. 213).

Pode-se concluir desta afirmação, que os matemáticos quando modificaram a forma de apresentação de suas obras, poderiam estar filtrando as informações para atingir uma quantidade maior de pessoas, pois certas obras concisas, porém coesas, pode atrair muito mais, ou simplesmente estavam desatentos ao rigor matemático. Mas foi nessa época que o nome Trigonometria é atribuído pela primeira vez como título do assunto.

Contudo as contribuições na Europa tiveram um importante papel para o desenvolvimento da Trigonometria, principalmente as produções do século XVI, como se observa,

Num resumo das realizações matemáticas do século XVI, pode-se dizer [...], que a trigonometria se aprimorou e sistematizou e que se calcularam excelentes tábuas. O campo estava preparado para os notáveis avanços do próximo século (EVES, 2004, p. 314).

Portanto, a Trigonometria se desenvolveu imensamente na Europa entre os séculos XV e XVI, de forma a proporcionar condições suficientes para desenvolvimento desta área nos próximos séculos.

3 METODOLOGIA UTILIZADA NA PESQUISA

Em nosso trabalho, desenvolveu-se inicialmente a fase exploratória através de um estudo bibliográfico. E por fim, a pesquisa que foi realizada no Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa, no período de 20 a 24 de outubro de 2008.

Nesta pesquisa utilizou-se do método estatístico, “este método fundamenta-se na aplicação da teoria estatística da probabilidade e constitui importante auxílio para a investigação em ciências sociais”. (GIL, 2006, p. 35).

Como instrumento de coleta de dados fez-se uso de questionários fechados, tanto para os alunos quanto para os professores. Porém foram feitos pré-testes para se chegar a uma melhor forma de apresentação.

A amostragem foi definida por conveniência, pois a amostra foi composta por todos os alunos do Ensino Médio, presentes no período de realização da pesquisa, e que estudaram ou que ainda estudavam o conteúdo de Trigonometria, durante o ano letivo em curso, bem como os respectivos professores. Todos os indivíduos participaram de forma consubstanciada.

Desta forma fez-se a tabulação dos dados obtidos através dos questionários, que mediante uma distribuição de frequência absoluta e relativa proporcionou a análise e interpretação dos dados. Este tratamento será apresentado no capítulo seguinte.

4 ANÁLISE DO ENSINO-APRENDIZAGEM ATRAVÉS DE DADOS

O presente capítulo exibe as análises feitas através de dados contidos nas respostas dos questionários.

4.1 Resultados obtidos sob a ótica dos alunos

4.1.1 Conceito Atribuído pelo Aluno ao Conteúdo de Trigonometria

Tabela 1: Conceito Atribuído pelo Aluno ao Conteúdo de Trigonometria

CONCEITO SOBRE TRIGONOMETRIA	F.A.	%
Muito difícil	09	12,16
Difícil	42	56,76
Fácil	23	31,08
Muito Fácil	00	0,00
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

Os dados da tabela 1 revelam que 56,76% dos alunos conceituam o conteúdo trigonométrico como difícil, outros 12,16% consideram o conteúdo muito difícil, mas 31,08% consideram o conteúdo de Trigonometria fácil. E por fim, não aparece aluno que considera este conteúdo muito fácil.

Estes dados mostram que a maioria dos alunos (68,92%) considera o conteúdo de Trigonometria como difícil ou muito difícil. Isto comprova que o processo ensino-

aprendizagem não atende de maneira eficiente às expectativas dos alunos em sua maioria, tornando os conteúdos não inteligíveis. Porém é preciso inverter este quadro, para que o conhecimento produzido pelo homem seja disseminado entre um maior número possível de pessoas, como se observa,

[...] os homens vão investigando o mundo da natureza e das relações sociais e elaborando conhecimentos e experiências, formando o que chamamos de saber científico. Nessas condições, o saber se torna objeto de conhecimento cuja apropriação pelas várias gerações, no ensino, constitui-se em base para a produção e a elaboração de novos saberes (LIBÂNEO, 1994, p. 129).

Nesse sentido, o conhecimento ou saber científico deverá chegar a todos para que haja uma inserção destes no processo de produção de novos conhecimentos.

4.1.2 Percepção do Aluno Quanto a Abordagem do Professor em Relação à Origem da Trigonometria

Tabela 2: Percepção do Aluno Quanto a Abordagem do Professor em Relação à Origem da Trigonometria

A ORIGEM DA TRIGONOMETRIA	F.A.	%
Recentemente	10	13,51
Pelos povos antigos	07	9,46
Pelos povos antigos e aperfeiçoado com o passar do tempo	14	18,92
Não fez nenhum comentário	43	58,11
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 2 revela que 58,11% dos alunos afirmam que o professor não fez nenhum comentário acerca da origem da Trigonometria, porém 41,89% dos alunos declaram que o professor fizera comentários, mas conforme as afirmações dos alunos, podemos verificar diferentes comentários, como segue: 13,51% dos alunos afirmam que o professor abordou a origem da Trigonometria como um fato recente, 9,46% que a origem se deu com os povos antigos e apenas 18,92% dos alunos afirmam que o professor tratou sobre a origem da Trigonometria como sendo contribuição do povos antigos e que fora aperfeiçoada com o passar do tempo.

Pode-se concluir que a ação do professor não contribui totalmente para assimilação e acomodação do saber pelo aluno e que em alguns casos pode até atrapalhar ou deixar lacunas, e com estas lacunas o aluno não poderá criar corretas ligações entre os fatos daquele conhecimento. De outra forma, havendo corretas ações, haverá também fortes pontes entre os conhecimentos.

4.1.3 A Forma que o Professor Explica o Conteúdo

Tabela 3: A Forma que o Professor Explica o Conteúdo

AÇÃO DO PROFESSOR	F.A.	%
Com clareza e tranqüilidade	48	64,86
Com clareza, porém rapidamente	13	17,57
Sem clareza, porém com tranqüilidade	08	10,81
Sem Clareza e rapidamente	05	6,76
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

Sobre o assunto, a tabela 3 mostra que 64,86% dos alunos estabelecem que o professor dispõe de clareza e tranqüilidade quanto a forma de explicar o conteúdo, apesar 17,57% dos alunos afirmarem que o professor dispõe de clareza, porém a explicação é de forma rápida, outros 10,81% dos alunos declara que a forma de explicar o conteúdo é sem clareza, mas com tranqüilidade e por último, 6,76% afirmam que o professor não tem clareza e nem tranqüilidade em suas explicações.

Contudo a maioria (64,86%) está de acordo com a forma trabalhada pelo professor em suas explicações, porém os demais (35,14%) declaram que a explicação do professor não está completa, pois existem algumas deficiências. Assim sendo, é preciso que as explicações contemplem várias perspectivas de forma a atingir vários observadores que possuem diferentes visões.

4.1.4 A Atitude do Professor em Relação às Dúvidas no Ensino de Trigonometria

Tabela 4: A Atitude do Professor em Relação às Dúvidas no Ensino de Trigonometria

ATITUDE DO PROFESSOR	F.A.	%
Explica novamente repetindo a mesma demonstração	48	64,86
Explica novamente e de forma diferente	22	29,73
Contextualiza o tópico em questão	00	0,00
Não insiste na explicação	04	5,41
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 4 revela a atitude do professor diante das dúvidas dos alunos em relação ao ensino de Trigonometria, pois 64,86% dos alunos afirmam que este profissional retorna ao conteúdo explicado, porém repetindo a mesma demonstração, mas 29,73% dos alunos declaram que o professor explica novamente e de forma diferente, porém, segundo os alunos, 5,41% destes afirmam que o professor não insiste na explicação. E infelizmente, nenhum aluno declara que o professor contextualiza o tópico em questão.

Desta forma, o professor deverá está mais atento a todos os alunos, pois cada indivíduo tem sua maneira de assimilação e acomodação de conhecimentos, ou seja, cada indivíduo necessita de uma forma própria e de um determinado tempo para processar as informações. E se o professor não atenta para estes fins poderá comprometer a motivação da maioria dos alunos, pois “a motivação é fator fundamental da aprendizagem. Sem motivação não há aprendizagem”. (PILETTI, 2006, p. 63).

4.1.5 Os Materiais usados pelo Professor no Ensino de Trigonometria

Tabela 5: Os Materiais usados pelo Professor no Ensino de Trigonometria

MATERIAIS USADOS	F.A.	%
Quadro, giz e régua apenas	36	48,65
Quadro, giz, régua e livro didático apenas	36	48,65
Quadro, giz, régua, livro didático, compasso, transferidor e outros	02	2,70
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

Em relação aos materiais usados pelo professor em sala de aula, 97,30% dos

alunos afirmam que são usados: quadro, giz e régua apenas, porém metade destes alunos inclui nesta relação o livro didático. E apenas 2,70% dos alunos citam outros materiais que vai além destes mencionados.

Portanto é preciso ampliar o uso de materiais que propiciem o aprendizado, pois somente a teoria não basta, como se observa,

Aprende-se muito em livros, teoricamente, sem a prática: ensina-se análise de laboratório sem laboratório; jornalismo sem jornal; mineração sem minas. O resultado é a formação de profissionais que só conseguem superar as dificuldades aprendendo com o próprio trabalho (PILETTI, 2006, p. 140).

Nesse sentido, o aluno não irá aprender o bastante, ou praticamente quase nada. Então deverá esperar uma oportunidade de por em prática essas teorias, mas nem sempre a oportunidade é para os que têm apenas teorias. Desta forma a escola deverá reforçar ainda mais seu papel de formar cidadãos conscientes a partir da união entre teorias e práticas.

4.1.6 Método usado pelo Professor no Ensino de Trigonometria

Tabela 6: Método usado pelo Professor no Ensino de Trigonometria

MÉTODO USADO	F.A.	%
Aula teórica	19	25,68
Aula prática	09	12,16
Aula teórica e prática	46	62,16
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 6 revela que 62,16% dos alunos admitem que o professor usa como método de ensino aulas teóricas e práticas, mas 25,68% dos alunos afirmam que o método usado pelo professor é apenas com aulas teóricas e 12,16% declaram que são aulas práticas.

Assim sendo, conforme a maioria dos alunos, o professor trabalha unindo a teoria com a prática. Porém devemos questionar qual a forma que efetivamente ocorre esta união, pois conforme item anterior, que tratou sobre os materiais usados pelo professor em sala de aula, não reflete bem esta união. Portanto, podemos afirmar que a união teoria-prática em sala de aula está aquém de um processo ensino-aprendizagem eficiente. De outra forma, “se a aprendizagem escolar fosse semelhante à prática, ou ocorresse na própria ação, certamente seria muito mais eficiente e a porcentagem de esquecimento seria bem menor”. (PILETTI, 2006, p. 140).

4.1.7 Quanto a forma com que os Livros Didáticos Contribuem para o Estudo de Trigonometria

Tabela 7: Quanto a forma com que os Livros Didáticos Contribuem para o Estudo de Trigonometria

CONTRIBUIÇÃO DO LIVRO DIDÁTICO	F.A.	%
Com as ilustrações	03	4,05
Com as fórmulas	16	21,62
Com as ilustrações e fórmulas	50	67,57
Não ajuda	05	6,76
TOTAL	74	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

Sobre o assunto, a tabela 7 mostra que 67,57% dos alunos concordam que o livro didático contribui com suas ilustrações e fórmulas para o estudo da Trigonometria, outros 21,62% dos alunos afirmam que são as fórmulas contidas no livro que ajudam, apenas 4,05% afirmam que apenas as ilustrações contribuem e 6,76% dos alunos declaram que o livro didático não contribui de forma alguma.

Contudo 93,24% dos alunos concordam que de alguma forma o livro didático contribui para o estudo da Trigonometria. Isto pode representar uma boa aceitação do livro didático pelo aluno, porém devemos observar melhor o percentual (21,62%) de alunos que afirmam que somente as fórmulas contribuem, pois em um estudo mais contextualizado, as fórmulas são apenas detalhes, são informações prontas, reduzidas, e que às vezes não produzem questionamentos. De outra forma, as ilustrações podem inverter esta situação, instigando a curiosidade do aluno, mas se as ilustrações contidas nos livros didáticos não atraem o aluno, então não poderá efetivar devidamente seu papel, que é de explicar, entre outros fatores, sobre a origem, desenvolvimento e aplicações dos conceitos.

4.2 Resultados obtidos sob a ótica dos Professores

É relevante lembrar que os professores que responderam aos questionários são professores dos alunos que também participaram desta pesquisa.

4.2.1 Conceito Atribuído pelo Professor ao Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

Tabela 8: Conceito Atribuído pelo Professor ao Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

CONCEITO DO APRENDIZADO DO ALUNO	F.A.	%
Ótimo	00	0,00
Bom	00	0,00
Regular	02	100,00
Ruim	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 8 revela que entre as opções disponibilizadas, houve a escolha apenas de uma, ou seja, todos os professores conceituam o aprendizado do aluno em relação à Trigonometria como regular.

Assim sendo, podemos avaliar o processo ensino-aprendizagem e conceituá-lo como regular também, pois se o objetivo final deste processo é melhorar a aprendizagem do aluno, mas como isso não está acontecendo, então, desta forma, justifica a nossa avaliação para o processo ensino-aprendizagem.

4.2.2 A Importância de Contextualizar a História da Trigonometria no Ensino da mesma

Tabela 9: A Importância de Contextualizar a História da Trigonometria no Ensino da mesma

IMPORTÂNCIA	F.A.	%
Instigar a curiosidade do aluno	00	0,00
Instigar o poder de assimilação do aluno	01	50,00
Instigar a curiosidade e o poder de assimilação do aluno	01	50,00
Não desperta o aluno	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

Os dados da tabela 9 revelam que os professores estão divididos em suas opiniões, pois um professor afirma que a contextualização da história da Trigonometria no ensino desta, apenas instiga o poder de assimilação do aluno, enquanto o outro afirma que além de instigar o poder de assimilação, também fará da mesma forma em relação à curiosidade do aluno.

Portanto, os professores estão convictos de que, de uma forma ou de outra, é importante a contextualização da história da Trigonometria no próprio conteúdo.

4.2.3 A Frequência que o Professor usa a História e Contribuição dos Antigos Matemáticos no Ensino de Trigonometria

Tabela 10: Frequência que o Professor usa a História e Contribuição dos Antigos Matemáticos no Ensino de Trigonometria

FREQÜÊNCIA	F.A.	%
Alta	00	0,00
Média	02	100,00
Baixa	00	0,00
Nenhuma	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 10 mostra que todos os professores declararam que usa, em uma média frequência, a história e contribuição dos antigos matemáticos no ensino de Trigonometria.

Desta forma, podemos concluir que os professores estão propiciando aos alunos conhecerem as origens dos conceitos. Assim sendo, através da efetiva contextualização da história, os alunos terão o conhecimento amplo de como os povos viviam naquela época, as suas dificuldades, e a necessidade de buscar uma ferramenta nova, como também, a produção de novos saberes, e que nada aconteceu por acaso.

Portanto, a educação deverá, entre outras coisas, promover esclarecimentos sobre os fatos para que os alunos possam crescer culturalmente, como se observa,

A educação visa a transmitir ao indivíduo o patrimônio cultural para integrá-lo à sociedade e aos grupos que a constituem; visa, por conseguinte, a socializar, a ajustar os indivíduos à sociedade e, ao mesmo tempo, a desenvolver suas potencialidades e as da própria sociedade (OLIVEIRA, 2007, p. 11).

Nesse sentido, o professor deverá sempre criar pontes entres os conhecimentos, para que os alunos e a sociedade possam crescer juntos.

4.2.4 Fator que Interfere mais no Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

Tabela 11: Fator que Interfere mais no Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

FATOR QUE INTERFERE MAIS	F.A.	%
Livro didático não adequado	00	0,00
Falta de material para aulas práticas	00	0,00
Falta de interesse do aluno	02	100,00
Outros	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

O fator que mais interfere no aprendizado, conforme revela a tabela 11, foi a falta de interesse do aluno, fator este, eleito por todos os professores.

Neste contexto, deve-se analisar o que causa a falta de interesse por parte aluno. Pois o processo ensino-aprendizagem visa, entre outras coisas, a correção de fatos como este, porém, se isso não acontece, está havendo falha no processo. Por exemplos, uma aula sem material adequando ou a falta de uma boa relação professor-aluno, poderá causar desinteresse no aluno. De outra forma, uma maravilhosa relação professor-aluno será fonte geradora de motivação e interesse no aluno, pois “a relação entre professores e alunos deve ser uma relação **dinâmica**, como toda e qualquer relação entre seres humanos”. (PILETTI, 2006, p. 79).

4.2.5 Fator que Contribui mais para o Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

Tabela 12: Fator que Contribui mais para o Aprendizado do Aluno em Relação à Trigonometria

FATOR QUE CONTRIBUI MAIS	F.A.	%
Auxílio do bom livro didático	00	0,00
Trabalho com material em aulas práticas	02	100,00
Demonstrações no quadro-negro	00	0,00
Outros	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

O trabalho com material em aulas práticas, conforme tabela 12, foi eleito pelos professores como o fator que mais contribui para o ensino de Trigonometria.

Realmente, a utilização de material em aulas práticas propicia ao aluno ricas experiências, que ligada corretamente às aulas teóricas, conduzirá o aluno a ter reflexões conscientes em relação ao que se estuda.

Portanto, o professor precisa identificar entre suas várias ferramentas qual é a melhor, considerando o conteúdo e o perfil da turma, e sempre que possível utilizá-la juntamente com as demais.

4.2.6 Quanto ao Grau de Facilidade de Contextualizar a Trigonometria com as Novas Tecnologias e o dia-a-dia do Aluno

Tabela 13: Grau de Facilidade de Contextualizar a Trigonometria com as Novas Tecnologias e o dia-a-dia do Aluno

GRAU DE FACILIDADE	F.A.	%
Alto	01	50,00
Médio	01	50,00
Baixo	00	0,00
Não acontece	00	0,00
TOTAL	02	100

Fonte: Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa

A tabela 13 mostra que um professor declara que é alto o grau de facilidade de contextualizar a Trigonometria com as novas tecnologias e o dia-a-dia do aluno, porém o outro professor, afirma que o grau de facilidade, para esse contexto, é médio.

Pode-se concluir que tanto os alunos quanto os professores apresentam dificuldades, porém, estas possuem estágios diferentes em relação a cada indivíduo, neste caso, professor e aluno. Quanto às dificuldades existentes entre os professores, acreditamos que é preciso que estes estejam em pleno aprendizado para que possam superar seus obstáculos e passar para o aluno informações preciosas voltadas para atualidade, porém com referências pertinentes às origens dos conteúdos que remetem ao passado.

5 CONCLUSÃO

Neste capítulo encontram-se as principais conclusões do presente trabalho, que respondem às questões da pesquisa e, ao mesmo tempo, oferecem algumas recomendações à escola, principalmente, ao professor. Da mesma forma, devido à complexidade da problemática da pesquisa no contexto da educação, recomenda-se também que outros pesquisadores, em trabalhos futuros, atentem para o tema exposto e que possam, a partir deste, chegar a uma investigação ainda mais abrangente.

Ressalta-se também o aprendizado dos pesquisadores através do Trabalho de Conclusão de Curso. É oportuno lembrar que o estudo analisou as dificuldades no processo ensino-aprendizagem de Trigonometria sob a ótica dos alunos e professores do Ensino Médio do Colégio Estadual Joana de Freitas Barbosa.

Por meio dos resultados alcançados, chegou-se às justificativas que respondem às questões norteadoras desta pesquisa.

De acordo com a tabela 1 quanto ao conceito sobre o conteúdo de Trigonometria, a maioria dos alunos considera este conteúdo como difícil ou muito difícil. Por outro lado, os professores conceituam o aprendizado do aluno como regular, como mostra a tabela 8. Isto comprova que o processo ensino-aprendizagem não atende de maneira eficiente às expectativas dos alunos em sua maioria. Como podemos verificar na tabela 3 quanto à forma que o professor explica o conteúdo, apesar de ser acompanhada de clareza e tranquilidade, conforme concordância da maioria dos alunos, outros afirmam que não ocorrem as duas coisas ao mesmo tempo, e alguns foram mais além, afirmaram que a explicação do professor não tem clareza e que acontece de forma rápida.

Entretanto, para agravar ainda mais esta situação, observamos que existem atitudes dos professores que não contribuem para melhorar este quadro, pois quando surgem

dúvidas no momento da explanação do conteúdo, os professores, geralmente, retomam a explicação utilizando-se da mesma demonstração, conforme declaração da maioria dos alunos mostrada na tabela 4.

Mas, para o professor, o fator que mais interfere no aprendizado do aluno é a falta de interesse do próprio aluno, afirmação de todos os professores conforme tabela 11.

Diante do exposto, o professor deve preparar suas aulas objetivando corrigir essas deficiências, buscando métodos que contemple a todos de forma a propiciar motivação.

Um fator que pode contribuir bastante para o aprendizado do aluno é o uso de bons materiais em aulas práticas. Podemos constatar, através da tabela 6, que os professores usam métodos que envolvem aulas teóricas e práticas, porém existe uma contradição neste fato, pois observando a tabela 5, consta que a maioria dos alunos afirma que o professor usa apenas quadro, giz e régua, sendo que muitos também acrescentam a esta lista, o livro didático. Ainda considerando que este possui uma boa aceitação pelos alunos, pois a maioria destaca as ilustrações e fórmulas como grandes contribuições do livro didático, conforme tabela 7.

Assim sendo, a aula acontece em meio a um sistema deficiente, porém os professores têm consciência que o trabalho com material em aulas práticas é um fator que contribui bastante para o aprendizado do aluno em relação à Trigonometria, conforme dados da tabela 12, onde todos os professores concordam com este fator.

Outro método importante para auxiliar o aprendizado do aluno em relação à Trigonometria é a contextualização da história desta na aplicação dos próprios conteúdos. Isto tem sido confirmado pelos professores, conforme revela a tabela 9. Porém a frequência de usar a contextualização é média, mostrada na tabela 10. Mas o grau de facilidade que os professores dispõem em contextualizar a história deste conteúdo com as novas tecnologias e o dia-a-dia do aluno, varia entre médio e alto, conforme tabela 13.

Desta forma, o professor deve buscar um aprofundamento ainda maior sobre a origem do conteúdo para que possa melhorar o grau de facilidade e ao mesmo tempo aumentar a frequência na contextualização, pois existe uma discrepância na percepção dos alunos em relação a esta abordagem, conforme dados da tabela 2. Estes dados mostram a maioria dos alunos concordando que o professor não fez nenhum comentário quanto à origem da Trigonometria, porém outros alunos revelaram que o professor fizera, mas os comentários evidenciados pelos alunos são divergentes. Portanto, precisa-se efetivamente esclarecer os fatos através de explicações claras e concisas para que os alunos percebam melhor as idéias contidas nos conteúdos.

Contudo constatamos que os professores precisam buscar novos métodos para o processo ensino-aprendizagem de Trigonometria que possam, primeiramente, auxiliar o próprio professor, tornando o assunto muito mais interessante e que seja exposto para o aluno com bastante entusiasmo.

Entre os novos métodos a serem buscados, deve-se disponibilizar uma maior atenção aos métodos práticos, pois há certa carência de empregá-los. Também é preciso melhorar a frequência e a forma como a contextualização da história, das novas tecnologias e do cotidiano do aluno, estão sendo associadas aos conteúdos.

Entretanto, todos os métodos deveram ter formas claras que, juntamente com a ação do professor, promoverão um longo alcance que irá contemplar todos os envolvidos no processo ensino-aprendizagem. Desta forma facilitará a motivação de todos.

Portanto, para encerrar nossa explanação, fica a sugestão para que outros pesquisadores desenvolvam estudos mais aprofundados com objetivo de detectar outras falhas e ao mesmo tempo complementar este, pois se trata de um imenso assunto e que este trabalho de pesquisa está muito distante de esgotá-lo, e nem era este o nosso objetivo.

Por fim, podemos considerar de grande valia todo este trabalho realizado, pois nos propiciou novas reflexões em relação aos nossos propósitos como futuros educadores. Verificamos que todo processo exige tempo e avaliação constante para que não se distancie do objetivo inicial, apesar de sermos vítimas de um sistema complexo e arraigado com tantas descrenças, mas é possível alcançar algo satisfatório.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Camila; TODESCHINI, Marcos. A matemática atraente. **Revista Veja**, São Paulo, ed. 1999, 14 mar. 2007.

ATHAYDE, Mariana. **Educação pública – porque a matemática é o bicho papão da escola?** Disponível em: <http://www.educacaopublica.rj.gov.br/discutindo/discutindo.asp?cod_per=37>. Acesso em: 26 mar. 2007.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: E. Blücher, 1996.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação. Brasília, 1998.

COSTA, Nielce M. Lobo da. **A história da trigonometria**. Educação Matemática em Revista, Ano 10, nº 13, mar. 2003.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas-SP: Ed. da UNICAMP, 2004.

FAGUNDES, Léa da Cruz. **Materiais manipulativos no ensino de Matemática**. Laboratório de Metodologia e Currículo - Departamento de Ensino e Currículo Faculdade de Educação - UFRGS. Disponível em: <http://mathematikos.psico.ufrgs.br/im/mat01038051/materiais_manip.htm>. Acesso em: 7 dez. 2006.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. **Manual de monografia da Universidade Tiradentes**. Aracaju: UNIT, 2003.

GONÇALVES, Hortência de Abreu. **Normas para referências, citações e notas de rodapé da Universidade Tiradentes**. Aracaju: UNIT, 2003.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. Coleção magistério. 2º grau. Série formação do professor. São Paulo: Cortez, 1994.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar**. 18. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

MULLER, Iraci. **Tendências atuais de educação matemática**. Disponível em: <<http://www.unopar.br/portugues/revistacientificah/artrev133/bodyartrev/133html>>. Acesso em: 15 marc. 2007.

OLIVEIRA, Pêrsio Santos de. **Introdução à sociologia da educação**. 3. ed. São Paulo: Ática, 2007.

PILETTI, Nelson. **Psicologia da educação**. 17. ed. São Paulo: Ática, 2006.

THAÍIS, (2006). **Aspectos positivos e negativos trigonométricos**. Disponível em: <http://www.ucs.br/lavia/pro/avalmod3.html>>. Acesso em: 7 dez. 2006.

ANEXO A

QUESTIONÁRIO - ALUNO

1. De maneira geral como você considera o conteúdo de Trigonometria?

Muito difícil

Difícil

Fácil

Muito Fácil

2. Seu professor explicou que a Trigonometria é um conteúdo elaborado em qual tempo?

Recentemente

Pelos povos antigos

Pelos povos antigos e aperfeiçoado com o passar do tempo

Não fez nenhum comentário

3. De que forma o professor explica o conteúdo?

Com clareza e tranquilidade

Com clareza, porém rapidamente

Sem clareza, porém com tranquilidade

Sem clareza e rapidamente

4. Qual a atitude do professor quando surgem dúvidas no ensino de Trigonometria?

Explica novamente repetindo a mesma demonstração

Explica novamente e de forma diferente

Contextualiza o tópico em questão

Não insiste na explicação

5. Quais os materiais usados pelo professor no ensino de Trigonometria?

Quadro, giz e régua apenas

Quadro, giz, régua e livro didático apenas

Quadro, giz, régua, livro didático, compasso, transferidor e outros

6. Qual o método usado pelo professor no ensino de Trigonometria?

Aula teórica

Aula prática

Aula teórica e prática

7. De que forma o livro didático ajuda no estudo das relações trigonométricas?

Com as ilustrações

Com as fórmulas

Com as ilustrações e fórmulas

Não ajuda

ANEXO B

QUESTIONÁRIO - PROFESSOR

1. Qual o conceito que você atribui para o aprendizado dos alunos em relação à Trigonometria?

- Ótimo
- Bom
- Regular
- Ruim

2. Qual a importância de contextualizar a história da Trigonometria no ensino da mesma?

- Instigar a curiosidade do aluno
- Instigar o poder de assimilação do aluno
- Instigar a curiosidade e o poder de assimilação do aluno
- Não desperta o aluno

3. Com que frequência você usa a história e contribuição dos antigos matemáticos no ensino de Trigonometria?

- Alta
- Média
- Baixa
- Nenhuma

4. Que fator interfere mais no aprendizado do seu aluno em relação à Trigonometria?

- Livro didático não adequado
- Falta de material para aulas práticas
- Falta de interesse do aluno
- Outros

5. Que fator contribui mais para o aprendizado do aluno em relação à Trigonometria?

- Auxílio do bom livro didático
- Trabalho com material em aulas práticas
- Demonstrações no quadro-negro
- Outros

6. Fala-se muito em contextualizar o conteúdo ensinado com o cotidiano do aluno, neste caso, em sua prática docente, qual é o grau de facilidade de contextualização do conteúdo trigonométrico com as novas tecnologias e o dia-a-dia do aluno?

- Alto
- Médio
- Baixo
- Não acontece