UNIVERSIDADE TIRADENTES

THIAGO FERREIRA
FERNANDO MALTAS

O ESTUDO DOS LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO

Propriá
2009

THIAGO FERREIRA
FERNANDO MALTAS

O ESTUDO DOS LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Universidade Tiradentes – UNIT, como um dos pré-requisitos para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

JOSÉ VIEIRA DE MATOS FILHO

Propriá
2009

THIAGO FERREIRA
FERNANDO MALTAS

O ESTUDO DOS LOGARITMOS NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada ao Curso de Matemática da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para a obtenção do grau de licenciado pleno em Matemática.

Aprovada em ____/____/_____.
Banca examinadora

____
nome do orientador (a)
Instituição

____
nome do professor (a)
Instituição

____
nome do professor (a)
Instituição

AGRADECIMENTOS

À Deus, primeiramente, que nos deu o dom da vida e nos permitiu chegarmos até aqui, iluminando nossas mentes e de todos aqueles que originaram e divulgaram para o mundo o conceito de logaritmo, concedendo-nos a honra de expor esta obra ao mundo.

As nossas famílias, que sempre nos apoiaram nos momentos mais difíceis dessa caminhada, nos dando apoio e incentivo para seguirmos em frente, estando ao nosso lado quando mais precisávamos.

A todos os professores que dedicaram horas além de suas obrigações institucionais no intuito de nos acrescentar conhecimentos, e em especial ao nosso orientador, o Professor Especialista José Vieira de Matos Filho, que foi de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos colegas que conviveram conosco durante esses 3 (três) anos, estudando juntos, ajudando uns aos outros, estendendo as mãos em difíceis obstáculos e que nunca nos deram as costas quando precisávamos de suas presenças e companheirismo.

"A invenção dos logaritmos surgiu no mundo como um relâmpago. Nenhum trabalho prévio anunciava ou fazia prever a sua chegada. Surge isolada e abruptamente no pensamento humano sem que se possa considerar consequência de obras ou de pesquisas anteriores".

Lord Moulton.

RESUMO

Sejam bem vindos à descrição de um dos temas mais importantes da matemática, os logaritmos. Utilizamos vários recursos para descrever as origens, conceitos e benefícios dessa importante técnica chamada logaritmo. Primeiramente foi feita a abordagem histórica do assunto, confrontando as diversas versões de vários autores sobre quem primeiro desenvolveu os conceitos matemáticos aqui descritos e quais suas contribuições genuínas, além de citações de alguns autores sobre o tema. Em seguida, selecionamos os principais conceitos, propriedades e demonstrações de logaritmos da forma mais abrangente possível e com detalhes importantes para aqueles que estão iniciando o estudo deste assunto. Utilizamos alguns gráficos para as demonstrações de função logarítmica, e exploramos ao máximo os exemplos das funções. Nos Sistemas de Logaritmos, buscamos mostrar principalmente as aplicações de logaritmos, que é uma das principais finalidades deste trabalho, além disso, utilizamos várias tabelas para auxiliar nas demonstrações e exemplos destes sistemas.

Palavras–Chave: Logaritmos; História; Matemática

LISTAS

LISTAS DE TABELAS

LISTAS DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Os **logaritmos** são umas das mais brilhantes invenções da matemática moderna. Quando boa parte dos matemáticos e pesquisadores já não acreditavam que pudesse surgir uma grande invenção no ramo da matemática, eis que no início do século XVII, dois grandes nomes entraram para a história como os inventores dos logaritmos: o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o escocês John Napier (1550-1617).

Por coincidência, nenhum dos inventores dos logaritmos era matemático profissional. Enquanto Jobst Bürgi era dedicado a fabricação de relógios, John Napier ou Barão de Murchiston, dedicava-se a escrever sobre vários assuntos, além de administrar suas grandes propriedades. O que os dois tinham em comum era o conhecimento em Matemática e Astronomia, e provavelmente nesses dois pontos é que a idéia da “nova invenção” começou a se desenhar. Os cálculos da Astronomia e da Navegação, foram um dos principais motivos que levaram os estudiosos a refletir sobre a necessidade de substituir cálculos mais difíceis como multiplicação e divisão, por cálculos mais simples como adição e subtração.

Devido às novas tecnologias, o estudo dos logaritmos passou a usar cada vez menos as tabelas logarítmicas, substituindo essas tabelas por máquinas de calcular de alta precisão, como calculadoras científicas e programas de computador. Mesmo com todas estas tecnologias, **o estudo dos logaritmos no ensino médio** é um dos conteúdos de maior dificuldade de aprendizagem em sala de aula, e se tornou conhecimento indispensável àqueles que disputam vagas em vestibulares e concursos públicos em todo o país.

Tentando encontrar caminhos que facilitem o estudo dos logaritmos, principalmente para aqueles que se deparam com o tema pela primeira vez, buscamos em diversas fontes bibliográficas com a orientação do Professor Especialista José Vieira de Matos

Filho, a maneira mais adequada de apresentá-lo, mostrando passo a passo todo o conteúdo. Tivemos dificuldades durante toda a pesquisa, principalmente por não conseguirmos encontrar as obras de Jobst Bürgi e John Napier, que seriam de grande importância histórica e conceitual para o desenvolvimento do tema, além disso, são raras as obras que abordam especificamente o estudo dos logaritmos.

Objetivos

Objetivo Geral

Fazer uma pesquisa bibliográfica sobre os logaritmos no ensino médio, buscando informações e conceitos que facilitem o estudo do tema.

Objetivos Específicos:

- Apresentar uma abordagem histórica dos logaritmos, citando os principais nomes que contribuíram para invenção do mesmo;
- Elaborar uma síntese com riqueza de exemplos, demonstrações e aplicações do conteúdo no dia-a-dia.

O trabalho foi dividido em quatro capítulos, sendo eles:

- Capítulo 1 – A História dos Logaritmos (Descreve desde a invenção dos logaritmos no século XVII até a sua aplicabilidade nos dias atuais);
- Capítulo 2 - Definições e Propriedades (demonstra as definições básicas de logaritmos e as propriedades decorrentes da sua definição);
- Capítulo 3 – Função Logarítmica (demonstra as definições dos principais tipos de funções logarítmicas com seus respectivos gráficos);
- Capítulo 4 – Sistemas de Logaritmos (demonstra os sistemas de logaritmos com suas definições e aplicações).

CAPÍTULO 1: A HISTÓRIA DOS LOGARITMOS

Grande parte dos autores pesquisados converge quanto à invenção dos logaritmos. A maioria deles descreve John Napier e Jobst Bürgi como os seus criadores, mas ressaltam que Napier foi o primeiro a publicar um trabalho a respeito e que só anos mais tarde Bürgi publicara o seu. Há também uma concordância quanto à independência dos trabalhos de Napier e Bürgi, já que os métodos utilizados pelos dois em suas respectivas criações são diferentes. Contudo, são raros os trabalhos bibliográficos dedicados a história dos logaritmos.

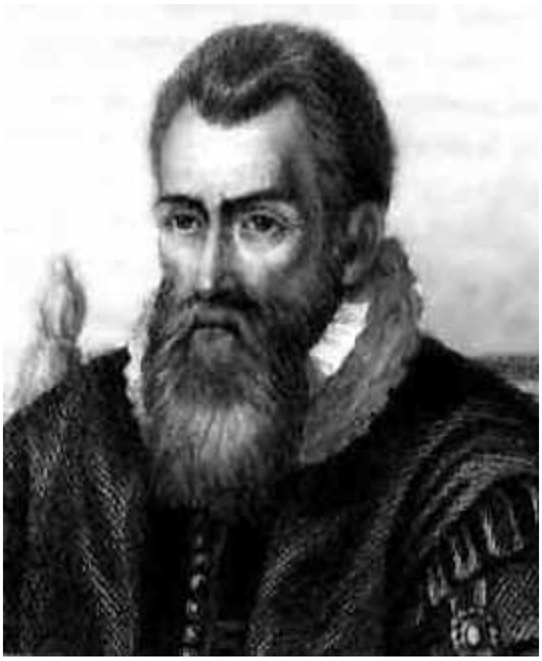
1.1 A INVENÇÃO DOS LOGARITMOS

Devido às dificuldades encontradas nos cálculos trigonométricos da Astronomia e da Navegação, surge no século XVII a idéia básica de substituir operações mais complicadas, como multiplicação e divisão, por operações mais simples, como adição e subtração, como se observa,

> *Percebendo que não há nada mais trabalhoso na prática da matemática, nem que prejudique e atrapalhe os calculadores do que as multiplicações, as divisões, as extrações do quadrado e do cubo dos números muito grandes... comecei a considerar em minha mente através de que tipo de arte certa e rápida poderia remover essas dificuldades*. (NAPIER, 1614. p.20).

No intuito de simplificar o cálculo, vários matemáticos desenvolveram nos séculos XVI e XVII, tabelas relacionando números naturais e os expoentes de 10 (dez) correspondente a cada um. Assim, foi constatado que todo número natural pode ser escrito como potência de 10, e esses expoentes foram chamados de **logaritmo**. A palavra logaritmo vem do grego: *logos* (razão) + *arithmos* (número). Neste período, dois matemáticos surgiram como os principais inventores dos logaritmos: o suíço Jobst Bürgi (1552-1632) e o escocês John Napier (1550-1617).

Os métodos de Bürgi e Napier são diferentes e claramente inventados independentemente. É importante ressaltar que os babilônios também contribuíram na criação dos logaritmos, construindo tabelas logarítmicas, e ano mais tarde o matemático grego Arquimedes teceu comentários em "*Arithmética Integra*" que também contribuíram bastante na invenção dos logaritmos.



JOHN NAPIER

JOBST BURGI

Durante 20 anos, John Napier trabalhou na sua descoberta. Ele estudou sobre a sucessão de potências de um número dado, antes de publicar seus resultados. Os resultados das investigações de Napier só foram publicados em 1614, no seu primeiro livro intitulado

"*Mirifi Logarithmorum Canonis Descriptio*" (Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos), sem expor os meio que tinha empregue.

Jobst Bürgi era dedicado a fabricação de relógios, mas também era versado em matemática. Bürgi parece ter sido convencido por Johannes Kepler (1571 -1630) a escrever seu artigo sobre logaritmos, já que o manuscrito está em grande parte na letra de Kepler. Ele escreveu uma tabela onde chamou seus elementos (logaritmos) de *números vermelhos* e seus termos (antilogaritmos) de *números negros*. Apesar de ter criado seus logaritmos por volta de 1600, Bürgi só publicou um trabalho a respeito em 1620, ficando atrás de Napier na prioridade do assunto.

1.2 OS LOGARITMOS NA ATUALIDADE

Apesar das tabelas logarítmicas serem cada vez menos usadas atualmente devido às maquinas de calcular e aos computadores, pois essas tecnologias facilitaram bastante os cálculos em diversos campos, o estudo dos logaritmos continua sendo importante para descrição de fenômenos que ocorrem nas mais diferentes áreas do conhecimento humano, envolvendo os logaritmos nas respectivas resoluções.

> *Em física, por exemplo, no ramo da acústica, aplica-se logaritmo no cálculo di nível sonoro. Já em química, o logaritmo é usado para calcular o pH (potencial hidrogeniônico), classificando-se, desse modo, uma solução química em ácida, neutra ou básica."* (BUCCHI, 1998, p.248).

O uso dos logaritmos na atualidade está diretamente relacionado a aplicações em áreas como telefonia móvel, intensidade sonora, demonstrações de multiplicação de bactérias, medição da magnitude de terremotos na escala Richter, investimento financeiro em bancos, ganho ou perda de peso, distribuição da rede elétrica, etc. São várias as aplicações de logaritmos em áreas do conhecimento humano. No capítulo 4, temos algumas dessas aplicações demonstradas.

CAPÍTULO 2: DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Neste capítulo, há uma série de demonstrações e propriedades de logaritmos, onde buscamos colocar um bom número de exemplos e demonstrações que facilitem seu estudo. Procuramos usar uma forma didática de expor este capítulo, escrevendo-o de forma clara e objetiva, utilizando metodologias de diversos autores para explorar ao máximo cada item e descrever com clareza as principais demonstrações de logaritmos.

2.1 DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

Logaritmo (log) de um número (b) é o expoente (x) atribuído a uma base (a) de forma que essa exponenciação seja igual ao número (b).

- $\log_a b = x$, se e somente se, $b = a^x$

Onde :

- x é o logaritmo ($x \in IR$);
- b é o logaritmando ($b \in IR_+^*$);
- a é a base do logaritmo ($0 < a \neq 1$).

Exemplos:

- $\log_2 16 = 4$, porque $16 = 2^4$

- $\log_3 27 = 3$, porque $27 = 3^3$
- $\log_8 47 = 1{,}852$, porque $47 = 8^{1,852}$

2.2 CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE UM LOGARITMO

Para que os logaritmos sempre existam, devemos ter:

- $\log_a b$: logaritmo positivo; base positiva; base diferente de 1.

A esse conjunto de condições chamamos de **campo de existência** ou **domínio dos logaritmos**.

- $\log_a b$ » $b > 0$; $a > 0$ e $a \neq 1$.

2.3 PROPRIEDADES DECORRENTES DA DEFINIÇÃO

- O logaritmo de 1, em qualquer base, é zero, isto é:

- $\log_a 1 = 0$ (a Є IR, $0 < a \neq 1$)

- O logaritmo da própria base é 1, em qualquer base, isto é:

- $\log_a a = 1$ (a Є IR, $0 < a \neq 1$)

- O logaritmo de uma potência da base é o expoente, em qualquer base, ou seja:

- $\log_a a^m = m$ (a, m Є IR e $0 < a \neq 1$)

- A potência de base a e expoente $\log_a b$, isto é:

- $a^{\log_a b} = b$ (a, b Є IR_+^* e a ≠ 1)

Prova:

Substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, resulta $a^{\log_a b} = b$.

- Dois logaritmos em uma mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais, isto é:

- $\log_a b = \log_a c$, se e somente se, b = c(a, b, c Є IR_+^* e a ≠ 1)

2.4 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS

- Primeira propriedade: Logaritmo de um produto

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

Prova:

- $\log_a (b\cdot c) = x$, então $b \cdot c = a^x$ (I)
- $\log_a b = y$, então $b = a^x$ (II)
- $\log_a c = z$, então $c = a^z$ (III)

Substituindo II e III em I, obtemos:

- $A^x = a^y \cdot a^z$, então $x = y + z$

Retomando à forma logarítmica, temos:

- $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

- Segunda propriedade: Logaritmo de um quociente

- $\log_a b\backslash c = \log_a b – \log_a c$

Prova:

- $\log_a b\backslash c = x$, então $a^x = b\backslash c$ I
- $\log_a b = y$, então $a^x = b$ II
- $\log_a c = z$, então $a^z = c$ III

Substituindo II e III em I, obtemos:

- $A^x = a^y\backslash a^z$, então $a^x = a^y \cdot a^{-z}$, então $x = y - z$

Retornando à forma logarítmica, temos:

- $\log_a b\backslash c = \log_a b – \log_a c$

- Terceira propriedade: Logaritmo de uma potência

- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

Prova:

- $\log_a b^m = x$, então $a^x = b^m$ I
- $\log_a b = y$, então $a^y = b$ II

Substituindo II em I, obtemos:

- $A^x = (a^y)^m$, então $a^x = a^{m \cdot y}$, então $x = m\cdot y$

Voltando à forma logarítmica, temos:

- $\log_a b^m = m \cdot \log_a b$

2.5 DEFINIÇÃO DE ANTILOGARITMO

Sejam *a* e *b* números reais positivos com $a \neq 1$; se o logaritmo de *b* na base *a* é x, então *b* é o antilogaritmo de x na base *a*.

Em símbolos, se a, b Є IR, $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então:

- $\log_a b = x \Leftrightarrow b = \text{antilog}_a\, x$

Exemplos:

- $\text{antilog}_5\, 3 = 125$, pois $\log_5 125 = 3$
- $\text{antilog}_3\, 4 = 81$, pois $\log_3 81 = 4$
- $\text{antilog}_8\, 2 = 64$, pois $\log_8 64 = 2$

2.6 MUDANÇA DE BASE

Vamos ver agora como mudar a base de um logaritmo sem alterar seu valor:

Por exemplo, para passar $\log_a b$, com a e b positivos e $a \neq 1$, para a base c, com $c > 0$ e $c \neq 1$, utilizaremos a expressão:

- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, sendo: $b > 0$, $0 < a \neq 1$, $0 < c \neq 1$

Demonstração:

Se $\log_a b = x$, então $a^x = b$.

Aplicando o logaritmo na base c, em ambos os membros, temos:

- $\log_c a^x = \log_c b$
- $x \cdot \log_c a = \log_c b$

Então:

- $x = \frac{logc\ b}{logc\ a}$

Prova:

- $\log_a b = x$, então $a^x = b$ (I)
- $\log_c b = y$, então $c^y = b$ (II)

Comparando I e II, concluímos que $a^x = c^y$.

Fazendo $\log_c a = z$, temos $c^z = a$.

Substituindo $a = c^z$ em $a^x = c^y$, obtemos $c^{xz} = c^y$.

Então:

$x = y\backslash z$.

Portanto, temos que:

- $\log_a b = \log_c b/\log_c a$

Observação 1

Para passar $\log_a b$ para a base b devemos fazer:

- $\log_a b = \log_b b/\log_b a$
- $\log_a b = 1/\log_b a$, com a, b Є $IR_+^* - \{1\}$

Exemplos:

1. $\log_3 5$ convertido para a base 2 fica:

- $\log_3 5 = \log_2 5/ \log_2 3$.

2. $\log_2 7$ convertido para a base 10 fica:

- $\log_2 7 = \log 7/\log 2$

3. $\log_{100} 3$ convertido para a base 10 fica:

- $\log_{100} 3 = \log 3/ \log 100 = \log 3/ 2 = ½ \log 3$.

Observação 2

Se a e b são reais positivos com a diferente de 1 e β é um real não nulo, então tem-se :

➢ $\log_{a^\beta} b = 1/\beta \cdot \log_a b$

Demonstração:

Devemos considerar dois casos:

1º Caso :

Se b = 1, temos:

➢ $\log_{a^\beta} 1 = 0 \Rightarrow \log_{a^\beta} 1 = 1/\beta \cdot \log_a 1$

2º caso :

Se b ≠ 1, temos:

➢ $\log_{a^\beta} b = 1/\log_b a^\beta = 1/\beta \cdot 1/\log_b a = 1/\beta \cdot \log_a b$

Exemplos:

1. $\log_8 3 = \log_{2^3} 3 = ⅓ \cdot \log_2 3$
2. $\log_{1/5} 6 = \log_{5^{-1}} 6 = - \log_5 6$
3. $\log_{1/9} 5 = \log_{3^{-2}} 5 = (- ½) \cdot \log_3 5$

2.7 COLOGARITMO

Chama-se cologaritmo de um número b ($b \in$ IR e $b > 0$), numa base a ($a \in$ IR e $0 < a \neq 1$), ao oposto do logaritmo de b na base a.

- Se $0 < a \neq 1$ e $b > 0$, então $\text{colog}_a\, b = -\log_a b$.

Ao oposto do logaritmo de um número numa certa base denominamos *cologaritmo* desse número na mesma base.

Exemplos:

- $\log \frac{1}{4} = \log 1 - \log 4 = 0 - \log 4 = -\log 4 = \text{colog}\ 4$
- $\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = 0 - \log_a b = -\log_a b = \text{colog}_a\, b$
- $\text{colog}_2\, 5 = -\log_2 5 = \log_2 \frac{1}{5}$
- $\text{colog}_2 \frac{1}{3} = -\log_2 \frac{1}{3} = \log_2 3$

CAPÍTULO 3: FUNÇÃO LOGARITMICA

Neste capítulo há uma série demonstrações de função logarítmica. Além disso, possui gráficos de função logarítmica crescente e decrescente, função logarítmica e sua inversa e inequações logarítmicas. E mais uma série de exemplos em cada um dos itens citados abaixo.

3.1 DEFINIÇÃO

Dado um número real a ($0 < a \neq 1$), denomina-se *função logarítmica* de base a a função f de IR_+^* em IR que associa a cada x o número $\log_a x$.

- $f : IR_+^* \to IR$

  $x \to \log_a x$

Exemplos de funções logarítmas em IR_+^*:

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $g(x) = \log x$

c) $h(x) = \ln x$

d) $p(x) = \log_{1/3} x$

3.2 PROPRIEDADES

1ª) Se $0 < a \neq 1$, então as funções de IR_+^* em IR definida por $f(x) = log_a\, x$ e g de IR em IR_+^* definida por $g(x) = a^x$ são inversas uma da outra.

Demonstração:

Para provar esta propriedade, basta mostrarmos que $f \circ g = I_{IR}$ e $g \circ f = I_{IR^*}$

De fato:

$(f \circ g)\ (x) = f\ (g(x)) = \log_a g(x) = \log_a a^x = x$, e

$(g \circ f)\ (x) = g\ (f(x)) = a^{f(x)} = a^{\log a\ x} = x$

2ª) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente (decrescente) se, e somente se, $a > 1$ $(0 < a < 1)$.

Demonstração:

Provemos inicialmente a implicação

$a < 1 \rightarrow (\ \forall\ x_2 \in IR_+^*,\ \ \forall\ x_1 \in IR_+^*,\ \ x_2 > x_1 \rightarrow \log_a x_2 > \log_a x_1)$

De fato:

Quaisquer que sejam x_1 e x_2 positivos e $x_2 > x_1$ tem-se pela 3ª conseqüência da definição de logaritmo

$a^{\log_a x_2} > a^{\log_a x_1}$

E agora pela desigualdade acima, concluímos que:

$\log_a x_2 > \log_a x_1$

Provemos agora a implicação

$(\ \forall\ x_1 \in IR_+^*,\ \ \forall\ x_2 \in IR_+^*,\ \ \log_a x_2 > \log_a x_1 \rightarrow x_2 > x_1) \rightarrow a > 1.$

Considerando

$\log_a x_2 = y_2 \Rightarrow x_2 = a^{y_2} \Rightarrow$

$\log_a x_1 = y_1 \Rightarrow x_1 = a^{y_1}$ temos:

$y_2 > y_1$ então $a^{y_2} > a^{y_1}$.

Pelo fato de a função exponencial ser crescente para base maior que 1, concluímos que: $a > 1$.

3.3 GRÁFICOS

Caso 1 – a base é maior do que 1 ($a > 1$)

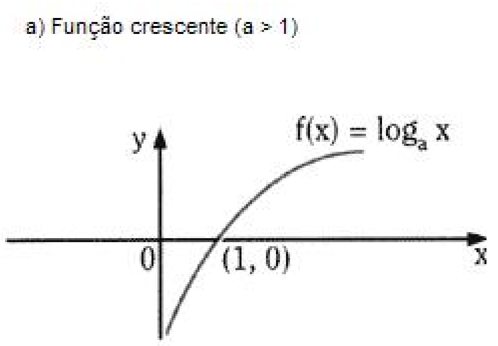


Gráfico 1: Função Crescente

Caso 2 – a base é maior do que zero e menor do que 1 ($0< a<1$)

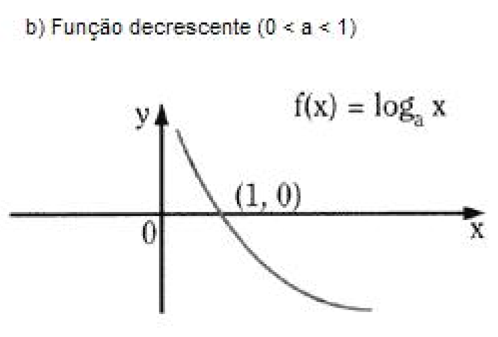


Gráfico 2: Função Decrescente

3.4 A FUNÇÃO LOGARÍTMICA E A SUA INVERSA

Seja a função logarítmica $y = \log_a x$. Sendo bijetora, essa função tem como inversa a função exponencial $y = a^x$.

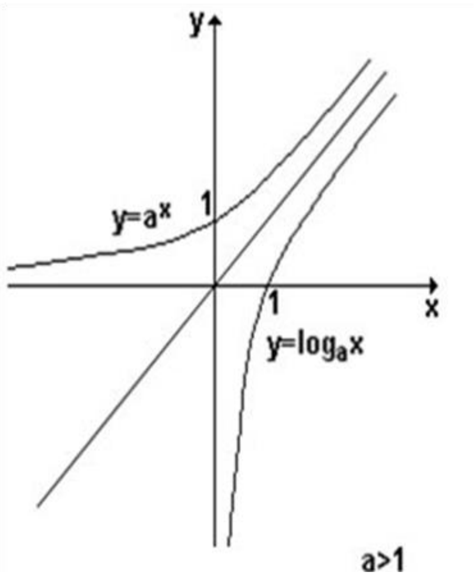


Gráfico 3: A > 1

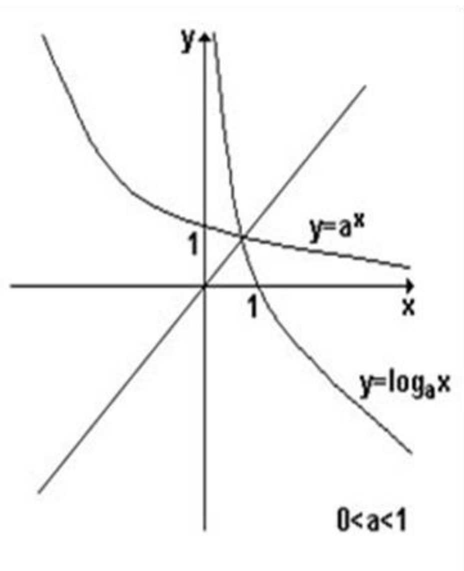


Gráfico 4: 0 < a < 1

Os gráficos das funções $y = a^x$ e $y = \log_a x$ são simétricos em relação à reta $y = x$, bissetriz do primeiro e do terceiro quadrantes.

- **Domínio e imagem:**

Tabela 1: Tabela de domínio e imagem

Função	Domínio	Imagem
$Y = \log_a x$	IR_+^*	IR
$Y = a^x$	IR	IR_+^*

Observação:

A função exponencial $y = a^x$ também é bijetora e admite como inversa a função logarítmica $y = \log_a x$.

3.5 EQUAÇÕES LOGARÍTMICAS

São equações que apresentam a incógnita no logaritmando, na base do logaritmo ou em ambos.

Exemplos:

a) $\log_2 (3x – 5) = \log_2 7$

Solução:

- $\log_2 (3x – 5) = \log_2 7 \Rightarrow 3x – 5 = 7 > 0$
- $3x – 5 = 7 \Rightarrow x = 4$.

b) $\log_2 (3x + 1) = 4$

Solução:

- $\log_2 (3x + 1) = 4 \Rightarrow 3x + 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 15 \Rightarrow x = 5$
- $S = \{5\}$.

c) $\text{Log}_2^2\, x - \log_2 x = 2$

Solução:

A equação proposta é equivalente à equação

- $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$

Fazendo $\log_2 x = y$, temos: $y^2 - y - 2 = 0 \rightarrow y = 2$ ou $y = 1$.

Mas $y = \log_2 x$, então:

- $\log_2 x = 2 \Rightarrow x = 2^2 = 4$
- $\log_2 x = -1 \Rightarrow x = 2^{-2} = \frac{1}{2}$
- $S = \left\{4, \frac{1}{2}\right\}$

Observações:

1. Condição de existência:

1.1. O logaritmando deve ser positivo;

1.2. A base deve ser positiva e diferente de 1.

2. Se os valores encontrados para a incógnita satisfazem a condição de existência.

3.6 INEQUAÇÕES LOGARITMICAS

São desigualdades que envolvem logaritmos e, por esse motivo, são chamadas de *inequações logarítmicas*.

Exemplos:

a) $\log_2 x > 4$

b) $\log (x - 1) + \log (3x + 2) \leq \log x$

c) $\log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} < \frac{1}{4}$

Devemos atentar para:

A condição de existência de cada logaritmo;

Aplicar as propriedades operatórias sempre que necessário;

Aplicar um dos casos abaixo:

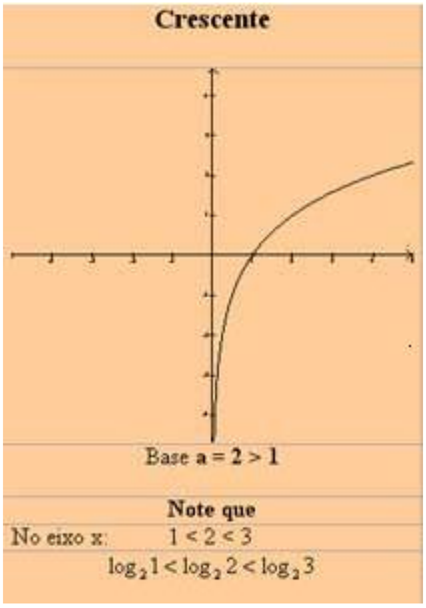


Gráfico 5: Inequação Crescente

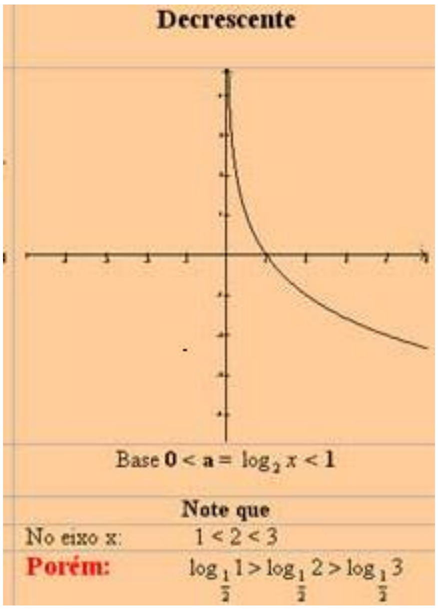


Gráfico 6: Inequação Decrescente

CAPÍTULO 4: SISTEMAS DE LOGARITMOS

Este capítulo é composto pelos sistemas de logaritmos decimais e neperianos. Nele há aplicações que evidenciam a importância de cada um desses sistemas. No sistema de logaritmos decimais encontra-se aplicações de investimento em banco a juros compostos, sistema de engorda na pecuária e medição da magnitude de terremotos na escala Richter. No sistema de logaritmos neperianos encontra-se aplicações de crescimento da população de uma cidade e cálculo de tempo de redução de massa de material radioativo.

4.1 SISTEMA DE LOGARITMOS DECIMAIS

Um número real positivo pode ser escrito, exata ou aproximadamente, em notação científica como o produto racional n, na forma decimal ($1 \leq n < 10$), por uma potência de 10. O logaritmo de um número diferente de uma potência de 10 com expoente inteiro, está compreendido entre dois números inteiros e sucessivos.

O logaritmo decimal de um número escrito como uma potência de 10 com expoente inteiro é igual a esse expoente.

4.1.3 O USO DA TABELA LOGARITMICA

O conjunto dos logaritmos na base 10 de todos os números reais positivos é chamado de sistema de logaritmos decimais ou de *Briggs*. Esse sistema é especialmente usado para realizar cálculos numéricos. Henri Briggs e Napier entraram em acordo sobre a comodidade que este sistema oferecia em relação à forma original logarítmica.

Tabela 1: Tabela de logaritmos decimais

NÚMERO	**LOGARITMO**	
1	0,000	$1=10^0$
2	0,301	$2=10^{0,301}$
3	0,477	$3=10^{0,477}$
4	0,602	$4=10^{0,602}$
5	0,699	$5=10^{0,699}$
6	0,778	$6=10^{0,778}$
...	...	...
10	1,000	$10=10^1$
...	...	...
100	2,000	$10=10^2$
...	...	...
145	2,161	$10=10^{2,161}$

O número 0,000 é chamado logaritmo de 1 na base 10, ou seja, $1=10^{0,000}$. Indica-se: $\log_{10} 1 = 0$.

O número 0,301 é chamado logaritmo de 2 na base 10, ou seja, $2=10^{0,301}$. Indica-se: $\log_{10} 2 = 0,301$.

Essas tabelas foram chamadas de *taboas de logaritmos decimais* porque os números são representados como potências de base 10. Mas os logaritmos podem ser escritos em qualquer base positiva diferente de 1.

Se a base do logaritmo for 10, costuma-se omiti-la na sua representação.

- $\log_{10} b = \log b$ (log → logaritmo decimal)

4.1.2 FORMA NEGATIVA E FORMA PREPARADA DE UM LOGARITMO DECIMAL

Quando $0 < N < 1$, ocorre um fenômeno matemático, onde a soma da característica negativa com a mantissa, altera a visualização desses caracteres (característica e mantissa), ou seja, essa operação altera os valores dos algarismos.

Por exemplo:

Quando $N < 1$

- $\log 10 = 1(c) + 0{,}000(m) = 1{,}000$

A característica e a mantissa ficam perfeitamente visíveis no resultado final.

Quando $0 < N < 1$

- $\log 0{,}00135 = -3\ (c) + 0{,}130334 = -2{,}869666$

A característica e a mantissa não ficam visíveis no resultado final.

Para resolver esse problema foram criados os conceitos de forma negativa e forma preparada.

- **Forma negativa**

É a forma final normal do logaritmo

- $\log 0{,}00135 = -3\ (c) + 0{,}130334 = -2{,}869666$

- **Forma preparada**

É uma forma que utilizada para explicitar os valores da característica e da mantissa com a seguinte técnica:

Subtrai-se 1 da parte inteira e soma-se 1 à parte decimal

Lembrando que –x + (-0,y) = -(x+y)

Então:

Tomando o exemplo anterior temos

- log 0,00135 = -2,869666
- log 0,00135 = (-2-1) + (-0,869666 +1) = -3 + 0,130334

Aqui efetuamos a operação como se 3 fosse positivo para que a representação fique assim:

- log 0,00135 = 3^{--},130334

Evidenciando assim a característica e a mantissa

- **Passagem da forma preparada para a forma negativa**

Basta somarmos a característica com a mantissa

- log 0,00135 = 3^{--},130334
- log 0,00135 = -3 + 0,130334
- log0,00135 = -2,869666

4.1.3 CÁLCULO DE UM NÚMERO QUE NÃO SE ENCONTRA NA TABELA DE LOGARIMOS

Para encontrarmos a mantissa de um número que não consta na tabela, utilizamos um processo chamado de interpolação:

- log 162,4

Tabela 3: Tabela de Mantissas

N	Mantissa (0, ...)
160	**204120**
161	206826
162	209515
163	212188
166	220108

- C = 3-1 = 2
- M =?

Tomando os valores laterais teremos:

- 162 < 162,4 < 163
- log 162 < log 162,4 < log 163

De acordo com a tabela

- log 162 tem mantissa 0,209515
- log 163 tem mantissa 0,212188

Para o aumento de 1(uma) unidade em N, temos também um acréscimo na mantissa, aplicando uma regra de três simples, temos:

162 ----------- 0,209515

163 ----------- 0,212188

1 ----------- 0,002673

0,4 ------------ X

X = 0,0010692

Então:

Mantissa de 162,4 = mantissa anterior + X = 0,209515 + 0,0010692

Mantissa de 162,4 = 0,2105842

Assim:

log 162,4 = 2 + 0,2105842

log 160,3 = 2,2105842

4.1.4 DETERMINAÇÃO DE UM LOGARITMO DADO SEU LOGARITMO DECIMAL

Dado o logaritmo decimal de um número N (N > 0), podemos determinar o valor de N. Vamos estudar dois casos:

1º caso: a mantissa do log N se encontra na tabela

Tabela 4: Tabela de Mantissas

N	Mantissa (0, ...)
140	**146128**
141	149219
142	152288
143	155336

Exemplo:

Sendo log N = 1,152288, calcular o valor de N.

Solução:

Analisando um pequeno trecho da tabela, observa-se que a mantissa 0,152288 refere-se ao número 142.

Como a característica é 1, temos N = 14,2.

2º caso: a mantissa do log N não está na tabela.

Tabela 5: Tabela de Mantissas

N	Mantissa (0, ...)
210	**322219**
211	324283

212	326336
213	328380
214	330414

Exemplo:

Sendo log N = 2,327563, calcular o valor de N.

Solução:

Observe que a mantissa 0,327563 não aparece na tabela.

Tomando-se as duas mantissas entre as quais está a mantissa 0,327563, podemos escrever:

$$0{,}326336 < 0{,}327563 < 0{,}328380$$

Comparando, temos:

212 ______ 0,326336

213 ______ 0,328380

Enquanto se acrescenta uma unidade de 212 para 213, aumentamos 0,002044 de 0,326336 para 0,328380.

Utilizando uma regra de 3 simples, vem:

212 ______ 0,326336

x ______ 0,327563

213 ______ 0,328380

De 212 para o número *x* temos um acréscimo d, enquanto que de 0,326336 para 0,327563 aumentamos 0,001227, então:

$1/0{,}002044 = d/0{,}001227 \rightarrow d = 0{,}001227/0{,}002044 \rightarrow d = 1227/2044 \rightarrow d = 0{,}6$

O número que corresponde a mantissa 0,327563 é:

$$N = 212 + d \rightarrow N = 212 + 0{,}6 \rightarrow N = 212{,}6$$

4.1.5 APLICAÇÕES DE LOGARITMO DECIMAL

1. Marcos aplicou R$ 1500,00 num investimento que rende 3% a.m., a juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o saldo será de R$ 2.700,00?

Temos $M = C(1+i)^t$, onde:

$M = 2700$

$C = 1500$

$i = 3\% = 0,03$

Substituindo:

$M = C(1+i)^t$

$2700 = 1500\ (1 + 0,03)^t$

$2700/1500 = 1,03^t$

$1,8 = 1,03^t$

A determinação do expoente t será feita através de logaritmos:

$\log 1,8 = \log 1,03^t$

$\log 1,8 = t \cdot \log 1,03$

$t = \log 1,8/\log 1,03 = 0,2552/0,0128$

$t = 19,88...$ meses (aproximadamente)

O saldo será de R$ 2700,00 após 20 meses aproximadamente.

2. Suponha que num sistema de engorda de gado, em regime de confinamento, cada animal tem um ganho de peso de 10% ao mês. Considerando $\log 1,1 = 0,041$ e $\log 2 = 0,301$, determine o tempo aproximado necessário para que um animal dobre de peso.

Vamos imaginar que o animal tenha hoje um peso x. no mês seguinte, esse peso terá aumentado 10%, isto é, passa a ser:

$x + 10\%$ de $x = x + 0,1x = 1,1$ de $x = x \cdot 1,1$

Portanto, ao final de cada mês, peso do animal é multiplicado por 1,1. Desse modo:

Ao final do 2º mês, o peso será $(x \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}1 = x \cdot 1{,}1^2$;

Ao final do 3º mês, o peso será $(x \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}1 = x \cdot 1{,}1^3$ e assim por diante.

No fim de *n* meses, o peso será $x \cdot 1{,}1^n$.

Como desejamos saber após quanto tempo o animal terá duplicado de peso, temos:

$$x \cdot 1{,}1^n = 2x$$

Cancelando x nos dois membros ($x \neq 0$), obtemos:

$1{,}1^n = 2$.

Usando os dados da questão, vem:

$\log 1{,}1 = 0{,}041 \rightarrow 1{,}1 = 10^{0{,}041}$

$\log 2 = 0{,}301 \rightarrow 2 = 10^{0{,}301}$

Logo: $1{,}1^n = 2 \rightarrow (10^{0{,}041})^n = 10^{0{,}301}$

$10^{0{,}041n} = 10^{0{,}301} \rightarrow 0{,}041n = 0{,}301$

$n = \frac{0{,}301}{0{,}041} \rightarrow n \cong 7{,}341$

Assim, obtemos:

7,341 meses = 7 meses + 0,341 de um mês

7,341 meses = 7 meses + 0,341 de 30 dias

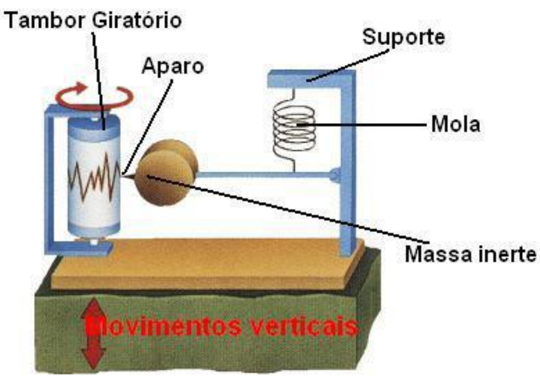
7,341 meses = 7 meses + 10,23 dias

Portanto, o animal terá duplicado de peso após 7 meses e 10 dias, aproximadamente.

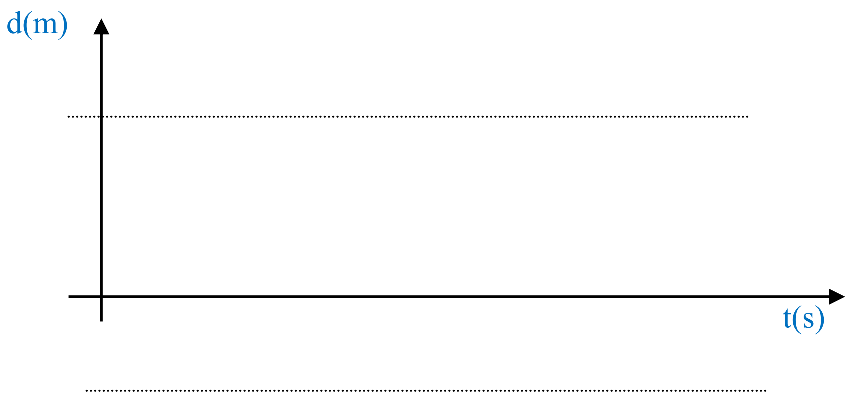
3. Os tremores de terra são sem dúvida um dos grandes problemas enfrentados por populações em vários locais do mundo. Para possibilitar um acompanhamento desses movimentos ou vibrações geográficas surgiu o sismógrafo. A escala usada para medir essas

vibrações terrestres é a escala Richter. As vibrações têm amplitude (altura) que é medida em micrometros (µm) e uma freqüência (que é a quantidade de oscilações em um determinado intervalo de tempo) medida em Hertz (Hz). A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto através da uma equação logarítmica $M_s = \log_{10} (A \cdot f) + 3.30$, onde:

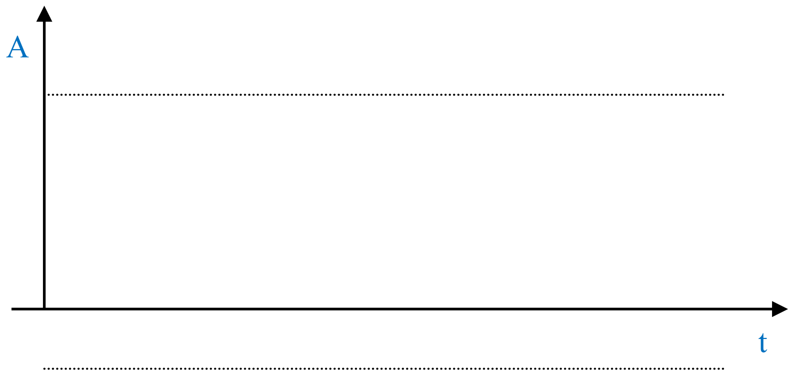
- M_s = magnitude do tremor na escala Richter;
- A = amplitude do tremor;
- f = freqüência do tremor.



O gráfico mostra a distância d em metros em função do tempo t em segundos.



Durante o terremoto, o sismógrafo registra a magnitude de um terremoto durante um pequeno intervalo de tempo:



Exemplo - Suponhamos que um terremoto teve como amplitude 2000 micrometros e a freqüência a 0,1Hz. Qual a magnitude deste terremoto?

$M_s = \log_{10} (A \,.\, f) + 3,30$

$M_s = \log_{10} (2000 \,.\, 0,1) + 3,30$

$M_s = \log_{10} 200 + 3,30$

$M_s = \log_{10} 200 + 3,30$

$\text{Log}_{10}\, 200 = x$

$10^x = 200$

$10^x = 10^{2.301029996}$

$x = 2.3010299$

$M_s = 2 + 3,30$

$M_s = 5,3$ na escala Richter.

O inventor do telefone Alexander Graham Bell, também utilizou a função logarítmica para calcular o nível sonoro medido ou chamado de decibel

Exemplo - Calcule o nível sonoro permitido pelo BPTran (Batalhão de Polícia de Trânsito) aos sons dos carros, sabendo que a intensidade é de 10^{-10}W/cm^2 e o limiar da percepção é igual a 10^{-16}W/cm^2.

Resolução:

$$\beta = 10.\log\frac{I}{Io}$$

Onde:

- β = nível sonoro(em decibel);
- W = Watts de potência;
- I = intensidade do som analisado;
- I_o = intensidade silenciosa.

$$\beta = 10.\log\frac{10^{-10}}{10^{-16}}$$

$$\beta = 10.\log(10^{-10+16})$$

$$B = 10.\log 10^6$$

$$\beta = 10.6.\log 10 \quad (\text{como } \log 10 = 1)$$

$$\beta = 60\text{dB}.$$

4.1.6 CARACTERÍSTICA E MANTISSA

Nem sempre o logaritmo decimal de um número será um número inteiro, para solucionar problemas desse tipo existe o método de determinação da característica, que é o número inteiro do resultado, acrescido de um número decimal chamado de mantissa. As mantissas de cada número estão registradas na tabela de logaritmos.

Conclusão: a soma da característica com a mantissa é o valor do logaritmo procurado.

- log 10 = 1
- log100 = 2
- log 20 = X
- Log 10 < log 20 < log 100
- 1 < log20 < 2
- C = 1
- C+1 = 2
- N = 20

Então:

- Log N = c+m (c Є Z/, 0 ≤ m < 1)

Onde:

c é a característica do logaritmo de N.

M é a mantissa do logaritmo de N.

4.1.7 CÁLCULO DA CARACTERÍSTICA DE LOG N

- Primeiro caso: N > 1

A característica é determinada pela soma dos algarismos da parte inteira de N menos uma unidade, ou seja:

- log 4253,3

Algarismos inteiros {4, 2, 5 e 3}, um total de quatro algarismos, então a característica será 4 – 1 = 3

- Segundo caso: 0 < N < 1

Nesse caso a característica será negativa e terá o valor da quantidade de zeros que antecedem o primeiro algarismo de valor maior que zero, ou seja:

- log 0,0023

O primeiro valor depois dos zeros é 2, então contamos os zeros antecessores que são, 0,00, totalizando 3 zeros, então:

- Log 0,0023
- C = - 3

4.1.8 DETERMINAÇÃO DA MANTISSA

Em qualquer questão logarítmica que necessite da mantissa, precisaremos recorrer as tabuas logaritmas que contém esses valores. Ou não dispondo dessas poderemos determiná-las a partir de um processo que veremos em outro tópico.

Observação:

Devemos atentar que a mantissa é a parte decimal que é somada a característica dos logaritmos, portanto não existe mantissa > 0

4.1.9 DETERMINAÇÃO DO LOGARITMO ATRAVÉS DO PROCESSO DA CARACTERÍSTICA COM A MANTISSA

- log 10
- C = 2-1
- C = 1
- M = 0,000

Então:

- log 10 = 1 + 0
- log 10 = 1
- De fato $10^1 = 1$
- log 243
- C = 3 – 1 = 2
- M = 385606

Então:

- log 243 = 2,385606

De fato $10^{2,385606} = 243$

4.2 SISTEMAS DE LOGARIMOS NEPERIANOS

O nome *logaritmos neperianos* foi dado em homenagem a John Napier. Esse sistema também é conhecido como sistema de logaritmos naturais e tem grande aplicação no estudo de diversos fenômenos da natureza. A base desses logaritmos é o número irracional e = 2,71828...

- $\log_e b = \ln b$ (ln → logaritmo natural)

4.2.1 O NÚMERO *e*

O número *e* é a base dos logaritmos neperianos. Quem o designou foi o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que provou ser esse número o limite de $(1+1/a)^a$ quando *a* cresce infinitamente.

Podemos memorizar facilmente o valor aproximado do número *e* (com 9 casas decimais), quando usamos um artifício: *e* = 2,7 1828 <u>1828</u>...

4.2.4 PASSAGEM DA BASE *e* PARA A BASE DECIMAL

- $\log_e x = \log x / \log e$ como $\log e = 0{,}4342...$

Temos que $\ln x = \log x / 0{,}43$

Como 1/0,43 = 2,3

Então ln x = 2,3 log x

4.2.3 APLICAÇÕES DE LOGARITMOS NEPERIANOS

1. O crescimento da população de uma cidade segue a lei $P = P_0 \, . \, e^{k\,t}$, em que P_0 é o número de habitantes no instante $t_0 = 0$, P é o número de habitantes no instante t e k é uma constante real. Sabendo que o número de habitantes é $2P_0$ no instante $t = 30$ e que $ln\ 2 = 0,693$, determinar o valor de k.

Resolução:

Substituindo P por $2P_0$ e t por 30 na expressão $P = P_0 \, . \, e^{k\,t}$, vem:

$2P_0 = P_0 \, . \, e^{30k} \rightarrow e^{30k} = 2 \rightarrow ln\ e^{30k} = ln\ 2 \rightarrow$

$\rightarrow 30 \, . \, k \, . \, \ln e = ln\ 2 \rightarrow 30 \, . \, k = 0,693 \rightarrow k = 0,0231$

2. Determinado material radioativo se desintegra segundo à lei $M = M_0 \, . \, e^{-0,05.t}$, em que t é o tempo em segundos; M, a massa desintegrada ao fim do tempo t; e M_0, a massa inicial. Calcular o tempo necessário para a massa se reduzir à quarta parte. (Dado: $ln\ 2 = 0,693$)

Resolução:

O problema pede o valor de t quando M = a ¼ . M_0.

Substituindo M por ¼ . M_0 na expressão $M = M^0 \, . \, e^{-0,05.t}$, vem :

$\frac{1}{4} \, . \, M_0 = M_0 \, . \, e^{-0,05.t} \rightarrow \frac{1}{4} \, . \, M_0 = M_0 \, . \, e^{-0,05.t} \rightarrow ln\ \frac{1}{4} = ln\ e^{-0,05.t} \rightarrow$

$\rightarrow ln\ 1 - ln\ 4 = -\ 0,05 \, . \, t \, . \, ln\ e \rightarrow -\ 2 \, . \, ln\ 2 = -\ 0,05 \, . \, t \rightarrow$

$\rightarrow - 2 \,.\, 0{,}693 = - 0{,}05 \,.\, t \rightarrow t = - 1{,}386 / - 0{,}05 \rightarrow t = 27{,}72$ séculos = 2.772 anos.

CONCLUSÃO

O estudo feito por este trabalho demonstrou que os logaritmos são uma parte da matemática feita para simplificar as nossas vidas assim como a própria matemática e que também é vista por muitos como algo complicado.

Logo após sua disseminação pelo mundo, os logaritmos ajudaram astrônomos e navegantes em seus cálculos gigantescos, reduzindo-os a números menores e de mesmo tamanho numérico, num tempo onde pena e tinta eram as ferramentas da escrita certamente deu um valor muito maior ao conceito simplificador dos logaritmos.

Foi perfeitamente compreendido que os cálculos logarítmicos estão mergulhados em um certo desuso pela população devido à simplicidade computacional oferecida pelas calculadoras, mas que nem sempre essa técnica é desnecessária já que existem casos onde apenas a calculadora não basta, como em concursos públicos ou onde a máquina atrasaria o resultado no caso da medidas de terremotos que são simplesmente tomados na base logarítmica de dez.

Esperamos ter conseguido alcançar nossos objetivos com este trabalho, contribuindo assim com mais uma fonte de estudo dos logaritmos no ensino médio, cientes do nosso papel na sociedade de agora em diante.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BUCCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática**. 1ª Edição. São Paulo: Moderna, 1998. 559p.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MURAKAMI, Carlos. **Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos**. 8ª Edição. São Paulo: Atual, 2002. 188p.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática – Aula por Aula, vol. 1**. 1ª Edição. São Paulo: FTD, 2003. 332p.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto. **Matemática – Uma Nova Abordagem, vol. 1**. 1ª Edição. São Paulo: FTD, 2001. 456p.

FONTES DE PESQUISAS NA INTERNET

http://www.somatematica.com.br/biograf/burgi.php

http://www.somatematica.com.br/biograf/napier.php

http://www.somatematica.com.br/superior/logexp/logexp5.phtml

http://www.brasilescola.com/matematica/logaritmo.htm