

UNIVERSIDADE TIRADENTES  
CURSO DE ENGENHARIA CIVIL



GABRIEL SOARES BENTO  
LUIZ EDUARDO DE OLIVEIRA CARVALHO

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM LAJES DO TIPO  
STEEL DECK COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

ARACAJU

2018

GABRIEL SOARES BENTO  
LUIZ EDUARDO DE OLIVEIRA CARVALHO

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM LAJES DO TIPO  
STEEL DECK COM MATERIAL VISCOELÁSTICO

Monografia apresentada à Universidade  
Tiradentes como um dos pré-requisitos  
para obtenção do grau de bacharel em  
Engenharia Civil

ORIENTADOR: Prof. M. Sc. DIEGO FARO  
ALVES

Aracaju

2018

GABRIEL SOARES BENTO  
LUIZ EDUARDO DE OLIVEIRA CARVALHO

REDUÇÃO DE VIBRAÇÕES EM LAJES DO TIPO STEEL DECK COM  
MATERIAL VISCOELÁSTICO

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovados em \_\_\_ / \_\_\_ / \_\_\_.

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. D. Sc. Emerson Figueiredo dos Santos  
Universidade Federal de Sergipe – UFS

---

Prof. M. Sc. Diego Faro Alves  
Universidade Tiradentes – UNIT

---

Prof. Ademar Tabosa de Oliveira  
Pós - Graduação Universidade Tiradentes – UNIT

*Dedicamos à nossos familiares, em especial, a José Carlos Bento, Jizelia Soares Costa Bento, Danúbio de Carvalho e Cleonice de Oliveira Carvalho, que nos apoiaram e acreditaram no nosso desenvolvimento profissional e pessoal. E para todos os leitores, compartilhamos nossa contribuição com enorme satisfação.*

## AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradecemos ao Mestre dos Mestres, Jesus Cristo, por ser nosso eterno guia e nunca nos desamparar, fonte de discernimento e sabedoria. E aos nossos familiares e amigos que nos acompanharam e influenciaram positivamente nesse processo.

Agradecemos especialmente ao, Prof. D. Sc. Emerson Figueiredo dos Santos e ao Prof. M. Sc. Diego Faro Alves, pelos conhecimentos transmitidos durante o curso, por todas as instruções e reuniões realizadas que serviram de fomento crucial para todas as etapas para elaboração deste trabalho de conclusão, além da disponibilidade, incentivo, confiabilidade e amizade depositados no nosso empenho.

Direcionamos nossa gratificação ao Prof. Ademar Tabosa de Oliveira, pela disposição e recepção através de visita técnica em obra sob sua responsabilidade e posterior explanação. Além dos devidos esclarecimentos acerca das lajes em *steel deck*, utilizadas em estruturas mistas.

Enfim, somos gratos ao curso de Engenharia Civil da Universidade Tiradentes, a todos os docentes e companheiros que fizeram parte da nossa jornada e também aos coordenadores, D. Sc. Paulo Eduardo Silva Martins e Hilton Porto, por desempenharem suas funções com boa conduta e ótimo grado.

A todos que fizeram parte da nossa formação, muito obrigado!

*“Uma pessoa com Ubuntu está aberta e disponível para as outras, apoia as outras, não se sente apeçada quando outras pessoas são capazes e boas, com base em uma autoconfiança que vem do conhecimento de que ela pertence a algo maior”*

*Arcebispo Desmond Tutu*

## RESUMO

Diante do avanço das pesquisas científicas e da tecnologia, juntamente com o advento da elaboração de programas de computador (softwares) e matérias-primas de melhor performance, as estruturas propendem atingir parâmetros mais esbeltos e conseqüentemente flexíveis, o que ocasiona problemas de natureza dinâmica.

Com o intuito de solucionar tais problemas, sistemas de atenuação de vibração podem ser inseridos nos projetos de novas estruturas, ou até mesmo como medida corretiva de estruturas existentes. Para instalação desse sistema, destaque-se os dispositivos que se dispõem de materiais viscoelásticos (MVE's) como núcleo amortecedor.

A fim de otimizar a avaliação do desempenho dinâmico da estrutura proveniente do uso destes dispositivos deve ser, necessariamente, realizada com o auxílio de ferramenta computacional, modelo numérico desenvolvido, à vista da complexidade e aleatoriedade demandada da análise de problemas dinâmicos.

As ações humanas de locomover-se, dançar, saltitar, entre outras, podem ocasionar vibrações excessivas em estruturas. Dentre as atividades exercidas pelo ser humano, é focalizado aqui, aquela que corresponde a atividade mais frequente da ocupação em lajes de pisos de edifícios residenciais e comerciais: o caminhar.

A ferramenta computacional manipulada neste trabalho foi o *CONTROLMADS*, que possibilita realizar simulações de estruturas sujeita a vibrações, além de determinar as frequências naturais, e também as amplitudes de vibração da estrutura modelada. A ideia deste trabalho é investigar se existe diminuição nas amplitudes de deslocamento em lajes submetidas ao caminhar de pessoas, além de analisar sobre a sensibilidade humana às vibrações. Provando assim a possível eficácia do material viscoelástico em sistemas atenuadores de vibração.

*Palavras chave: Caminhar; Vibração; Estruturas mistas; Material viscoelástico; Elementos finitos.*

## ABSTRACT

Before the advancement of scientific research and technology, along with the advent of computer programmes (softwares) and raw materials for best performance, the structures tend to achieve more slender and flexible, what causes problems of dynamic nature.

In order to solve such problems, vibration attenuation systems can be inserted in the projects of new structures, or even as a corrective measure of existing structures. For installation of this system, featured devices which has viscoelastic materials (VEM) as buffer core.

In order to optimize evaluation of the dynamic performance of the structure comes from the use of these devices must be, necessarily, performed with the aid of computational tool, numerical model developed, in the sight of the complexity and randomness defendant of dynamic problems analysis.

Human actions to move dance, skip, among others can cause excessive vibrations in structures. Among the activities carried out by the human being, is focused here, one that matches the most frequent activity of the occupation in floor slabs of residential and comercial buildings: the walk.

The computational tool manipulated in this work was the CONTROLMADS, wich makes it possible to perform simulations of structures subjects to vibrations, as well as determine the natural frequency, and also the amplitudes of vibration of the structure modeled.

The idea of this work is to inverstigate whether there is decrease in the amplitude of displacement in slabs subjected to walk of peoples, in addition to analyzing on human sensitivity to vibration. Thus proving the possible effectiveness of viscoelastic material on vibration attenuators systems.

*Keywords: Walk; Vibration; Mixed structures; Viscoelastic material; Finite elements.*

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> – Seções transversais de perfis metálicos laminados ou soldados. ....	19
<b>Figura 2</b> – Detalhes preventivos para corrosão em perfis expostos a intempéries...	20
<b>Figura 3</b> – Variação de módulo de elasticidade e resistência com a temperatura....	21
<b>Figura 4</b> – Forma trapezoidal e forma reentrante, respectivamente. ....	22
<b>Figura 5</b> – Conector <i>stud bolt</i> . ....	22
<b>Figura 6</b> – Contraventamento do tipo K utilizado em obra de um flat em Aracaju-SE. .....	23
<b>Figura 7</b> – Disposição: chapa nervurada de aço, vigas primárias, vigas secundárias e pilares.....	24
<b>Figura 8</b> – Armadura de compressão, usando tela TQ (tela quadrada).....	25
<b>Figura 9</b> – Armadura complementar para combate de momento fletor negativo sobre viga.....	25
<b>Figura 10</b> – Armadura adicional de combate a momento fletor positivo. ....	26
<b>Figura 11</b> – Acesso a pavimento de garagem. ....	26
<b>Figura 12</b> – marquises (balanço). ....	27
<b>Figura 13</b> – Escada em estrutura mista. ....	27
<b>Figura 14</b> – (a) linearidade do material viscoelástico, (b) não linearidade do material inelástico e (c) bi linearidade de material elasto-plástico. ....	28
<b>Figura 15</b> – Modelos mecânicos unidimensionais que caracterizam o MVE: (a) Modelo de Maxwell, (b) Modelo de Voigt-Kelvin e (c) Modelo para MVE do tipo borrocha. ....	29
<b>Figura 16</b> – Diferentes configurações para amortecedores viscoelásticos: (a) simples camada de MVE, (b) duplo sanduiche. ....	30
<b>Figura 17</b> – Esquema típico de estrutura tipo sanduíche ....	30
<b>Figura 18</b> – Deformação imposta em um núcleo viscoelástico.....	31
<b>Figura 19</b> – Representação da decomposição do módulo elástico transversal sob frequência de excitação. ....	32
<b>Figura 20</b> – Ciclo histerético de um material puramente viscoso.....	33
<b>Figura 21</b> – Energia elástica de um material viscoelástico. ....	34
<b>Figura 22</b> – Ciclos Histeréticos para diversos valores do fator de perda. ....	35

<b>Figura 23</b> – Variação do módulo de armazenamento $G'$ , módulo de perda $G''$ e fator de perda $n$ de um material viscoelástico linear.....	36
<b>Figura 24</b> – Viga em balanço.....	39
<b>Figura 25</b> – Idealização de oscilador simples amortecido. ....	39
<b>Figura 26</b> – Viga em balanço e diagrama de corpo livre. ....	41
<b>Figura 27</b> – Fontes de forças externas em estruturas. ....	44
<b>Figura 28</b> – Forças dinâmicas. ....	45
<b>Figura 29</b> – Vista frontal de uma torre e alguns de seus modos naturais de vibração de flexão no plano dessa vista e no que lhe é perpendicular. ....	47
<b>Figura 30</b> – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências. ....	48
<b>Figura 31</b> – Elemento de pórtico espacial e seus respectivos graus de liberdade. ..	50
<b>Figura 32</b> – Elemento de placa triangular com seus respectivos graus de liberdade. ....	51
<b>Figura 33</b> – Elemento de placa retangular com seus respectivos graus de liberdade. ....	52
<b>Figura 34</b> – Elemento de membrana triangular com seus respectivos graus de liberdade.....	52
<b>Figura 35</b> – Elemento de membrana retangular com seus respectivos graus de liberdade.....	53
<b>Figura 36</b> – Elemento hexaédrico linear com os nós e GIs dissipadores. ....	54
<b>Figura 37</b> – Deslocamentos, velocidades e acelerações temporais do centro de gravidade de uma pessoa nas direções lateral, frontal e vertical. ....	55
<b>Figura 38</b> – Caminhar representado por uma série de impactos.....	56
<b>Figura 39</b> – Velocidade de avanço e comprimento de passo variantes durante o ato de caminhar e correr. ....	57
<b>Figura 40</b> – Função de tempo de carregamento.....	58
<b>Figura 41</b> – Acelerações pico médias em várias frequências em função da sensibilidade humana.....	59
<b>Figura 42</b> – Sensibilidade humana às vibrações .....	60
<b>Figura 43</b> – Millenium Bridge no dia da inauguração.....	62
<b>Figura 44</b> – Esquema da análise de um modelo de estrutura de multigráus de liberdade.....	64
<b>Figura 45</b> – Representação de impactos sequenciais na laje.....	64

<b>Figura 46</b> – Esquema do modelo estrutural com aplicação de MVE nas interfaces altas e baixas. ....	65
<b>Figura 47</b> – Geometria e condições de contorno da laje estudada.....	66
<b>Figura 48</b> – Aplicação do material viscoelástico em configuração sanduíche em laje <i>steel deck</i> . ....	67
<b>Figura 49</b> – Demonstração das dimensões de cada elemento finito de placa.....	68
<b>Figura 50</b> – Simulações nas lajes originais e com material viscoelástico.....	71
<b>Figura 51</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1. ....	72
<b>Figura 52</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 3 pessoas na laje tipo 1.....	73
<b>Figura 53</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2. ....	74
<b>Figura 54</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2.....	74
<b>Figura 55</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1 à uma velocidade de 1,4 <i>m/s</i> .....	76
<b>Figura 56</b> – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1 à uma velocidade de 1,8 <i>m/s</i> .....	76
<b>Figura 57</b> – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2 para velocidade 1,4 <i>m/s</i> .....	78
<b>Figura 58</b> – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2 para velocidade 1,4 <i>m/s</i> . ....	78
<b>Figura 59</b> – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2 para velocidade 1,8 <i>m/s</i> .....	79
<b>Figura 60</b> – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2 para velocidade 1,8 <i>m/s</i> . ....	79

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> – Correlação entre frequência, velocidade de avanço e comprimento de passo.....	58
<b>Tabela 2</b> – Limites de percepção humana às vibrações verticais (pessoa em pé). ..	61

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> – Frequências naturais e modos de vibração do modelo estrutural sem <i>stud bolt</i> .....	69
<b>Quadro 2</b> – Frequências naturais e modos de vibração do modelo estrutural com <i>stud bolt</i> .....	70

# SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>15</b>
1.1. JUSTIFICATIVA .....	15
1.2. OBJETIVO GERAL .....	16
1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	17
<b>2. ASPECTOS GERAIS INTRÍNSECOS À ESTRUTURAS MISTAS .....</b>	<b>18</b>
2.1. PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DO AÇO.....	18
2.2. APLICAÇÃO DE LAJES MISTAS EM <i>STEEL DECK</i> E SUA COMPOSIÇÃO 21	
<b>3. CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS (MVE).....</b>	<b>28</b>
3.1. ALGUNS FATORES QUE INFLUÊNCIAM NO COMPORTAMENTO DOS MVE's.....	35
3.1.1. Temperatura e frequência .....	35
3.1.2. Influência da espessura do núcleo viscoelástico .....	37
<b>4. PRINCÍPIO À DINÂMICA DAS ESTRUTURAS .....</b>	<b>38</b>
4.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO.....	40
4.2. VIBRAÇÃO LIVRE E FORÇAS EXTERNAS QUE ATUAM NO CORPO RÍGIDO .....	42
4.3. FREQUÊNCIA NATURAL ANGULAR E MODOS DE VIBRAÇÃO .....	46
4.4. RESSONÂNCIA .....	48
<b>5. FERRAMENTA NUMÉRICO-COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DINÂMICA COM O MVE .....</b>	<b>50</b>
5.1. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL.....	50
5.3. ELEMENTO DE PLACA GENERALIZADO.....	52
5.4. ELEMENTO HEXAÉDRICO .....	53
5.5. ELEMENTO DE CASCA .....	54
<b>6. APLICAÇÃO DE MVE EM LAJES <i>STEEL DECK</i>.....</b>	<b>55</b>
6.1. INFLUÊNCIA DO CAMINHAR EM TERMOS DE FREQUÊNCIAS DE EXCITAÇÃO .....	55
6.1.1. Consequência das vibrações em seres humanos .....	58
6.1.2. Problemas ocasionados em estruturas devido a vibrações.....	61
<b>7. MODELO COMPUTACIONAL DA ESTRUTURA COM LAJE <i>STEEL DECK</i>...63</b>	
7.1. VERIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DAS LAJES .....	68
7.1.1. Modelo estrutural tipo 1 – Sem <i>stud bolt</i> .....	68

7.1.2. Modelo estrutural tipo 2 – Com <i>stud bolt</i> .....	69
<b>8. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DINÂMICAS SOB AÇÃO DO CAMINHAR HUMANO EM LAJES STEEL DECK.....</b>	<b>71</b>
8.1. LAJE TIPO 01 – SEM <i>STUD BOLT</i> .....	72
8.2. LAJE TIPO 02 – COM <i>STUD BOLT</i> .....	73
8.3. INFLUÊNCIA DE DIFERENTES VELOCIDADES NO MODELO ESTRUTURAL .....	75
8.4. VERIFICAÇÃO DAS ACELERAÇÕES NA ESTRUTURA DEVIDO A EXCITAÇÃO OCACIONADA PELO CAMINHAR.....	77
<b>9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>80</b>
9.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	81
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>82</b>

## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1. JUSTIFICATIVA

No contexto histórico, o aço apresentou a necessidade de aperfeiçoamento. A princípio na Europa, o ferro fundido e o ferro forjado, alavancaram construções de grande porte, como pontes e viadutos. Os vãos empregados estavam na faixa de 30 a 500 metros de comprimento, entre os séculos XVII e XIX.

Walter Pfeil e Michèle Pfeil (2009, p. 1 e 2) apontam que mesmo o ferro forjado apresentando a propriedade de boa resistência à corrosão e o ferro fundido boa resistência à compressão, evidencia-se a importância histórica da implementação do aço nessas construções. Este, já era conhecido desde a Antiguidade, porém os preços não eram acessíveis por falta de processos industriais. Até que, em 1856, um forno criado pelo inglês Henry Bessemer, permitiu a produção do aço em larga escala.

Esse material conquistou seu espaço no âmbito da construção civil gradativamente, possibilitando estruturas mais esbeltas, leves e com vãos maiores. O canteiro de obra, por sua vez, torna-se mais limpo; sua execução mais precisa e rápida, trazendo otimização nos preços e na logística de movimentação. Além disso, vantagens como flexibilidade arquitetônica, possibilidade de não utilização de cimbramento e redução de mão de obra são destacadas.

Não limitando a sua aplicação, o aço pode ser trabalhado em conjunto com o concreto, aproveitadas as características de ambos. Neste sentido, as lajes mistas de aço e concreto servem de exemplo. O sistema mais utilizado é a laje moldada in loco sobre fôrma de chapa nervurada de aço, denominada *steel deck*. Esta pode dispensar o escoramento durante a construção, ao passo que age como armadura positiva da laje. É importante a verificação das armaduras adicionais, que auxiliam no combate ao momento fletor. No Brasil, mais especificamente em Aracaju, esse mercado vem crescendo bastante, e com seu uso cada vez mais frequente, o estudo desses métodos construtivos é ainda mais relevante para a engenharia civil.

A vibração é um dinamismo que quando em excesso pode ser prejudicial pelo fato de influenciar na estabilidade das edificações, e ocasionar sensorial às pessoas que dela usufruem. O combate dessa situação deve ser uma consideração efetuada nas grandes obras, principalmente as que são compostas de material

metálico. Nota-se que sistemas auxiliares, como contraventamento, por si só, não atende a essas necessidades.

Tendo em vista que as estruturas metálicas são suscetíveis a vibrações, compreende-se o interesse na investigação de cunho dinâmico a cerca desses métodos construtivos, resultante da vulnerabilidade aos efeitos oriundos dessa categoria. Como objeto de pesquisa nesse trabalho, tem-se a análise do caminhar de pessoas em elementos de pisos de laje em *steel deck*. É preciso investigar de acordo com as correlações produzidas ao longo do tempo das respostas dinâmicas, semi-determinísticas e aleatórias (VARELA, 2004). Conhecidas as forças excitadoras, que são do tipo periódica arbitrária por indução humana através do caminhar, decorrente de oscilações simples amortecidas, torna-se possível a observação nos domínios do tempo e da frequência (SORIANO, p. 71 e 74).

Salienta-se a conveniência do uso de ferramentas numérico computacionais para auxiliar em diagnósticos dinâmicos, que geralmente demandam determinado grau de complexidade para sua compreensão. E a aplicação de técnicas atenuadoras dessas oscilações são tão necessárias quanto os sistemas que auxiliem na estabilidade. Atualmente, materiais viscoelásticos em conjunto a essas técnicas são inseridos nessa área de conhecimento de forma a enriquecer a engenharia estrutural e permitindo, comprovada a eficiência, vãos maiores e maior esbeltez.

## **1.2. OBJETIVO GERAL**

O objetivo desse trabalho é analisar a implementação de material viscoelástico como atenuador de vibrações em lajes mistas de *steel deck*, com auxílio da ferramenta numérico-computacional (CONTRLMADS).

### 1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desempenho dinâmico em função do caminhar humano em lajes *steel deck*, analisando a sensibilidade realçada de acordo com os parâmetros geométricos e físicos através da idealização em forma de elementos;
- Aplicação do material viscoelástico e apuração em termos de deslocamento, verificando o amortecimento das vibrações ocasionadas por cargas excitadoras e a viabilidade de sua implementação;
- Analisar as frequências e formas modais dos modelos com e sem material viscoelástico.

## 2. ASPECTOS GERAIS INTRÍNSECOS À ESTRUTURAS MISTAS

### 2.1. PROPRIEDADES E CARACTERÍSTICAS DO AÇO

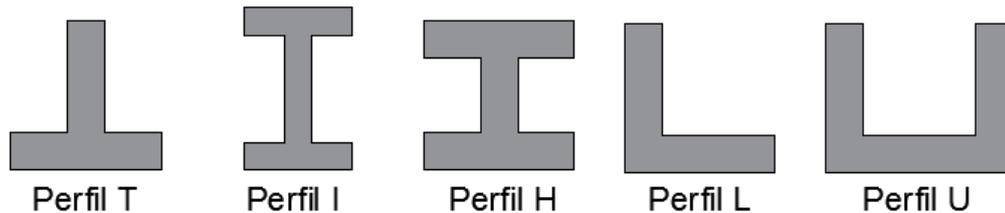
As chapas, barras, perfis laminados, fios trefilados, cordoalhas e cabos são as variadas formas de produção do aço nas indústrias. Os três primeiros são fabricados em laminadores, os fios trefilados são obtidos ao puxar determinada barra de aço sucessivamente através de fieiras, as cordoalhas e os cabos formam-se por associação de fios e os perfis estruturais, podem ainda, ser fabricados por dobramento de chapas e por associação de chapas soldadas.

Dispõe-se sobre as formas, segundo Pfeil, Walter (2009):

- Barras: Produtos laminados nos quais duas dimensões da seção transversal são pequenas em relação ao comprimento, sendo laminadas de seção circular, quadrada ou retangular alongada, comumente denominadas de chatas;
- Chapas: Produtos laminados nos quais a dimensão da espessura é muito menor que a largura e o comprimento;
- Fios ou arames: Obtidos por trefilação, sendo fabricados fios de aço doce e também de alto carbono. Os fios de aço duro são utilizados em molas, cabos de protensão de estruturas, etc;
- Cordoalha: Formadas por três ou sete fios arrumados em forma de hélice. O módulo de elasticidade da cordoalha é quase tão elevado quanto o de uma barra, temos  $E = 195.000 \text{ MPa}$ ;
- Cabos de aço: Formados por fios trefilados finos, agrupados em arranjos helicoidais variáveis. São muito flexíveis, permitindo seu emprego em moitões para multiplicação de forças. No entanto, seu módulo de elasticidade é baixo, cerca de 50% do módulo de uma barra maciça;
- Perfis de chapa dobrada: Fabricados pela dobragem das chapas feita em prensas especiais nas quais há gabaritos que limitam os raios internos da dobragem a certos valores mínimos;
- Perfis soldados: Formados pela associação de chapas ou perfis laminados simples, sendo ligados geralmente por soldas.

Hoje, diversas obras com perfis de aço laminados ou soldados (perfis: T, I, H, L, U) demonstrados na Figura 1, embebidos na confecção de seções de concreto para vigas e pilares mistos. (TABOSA, 2016).

**Figura 1** – Seções transversais de perfis metálicos laminados ou soldados.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

O aço reduz em 75% área de concreto, em até 50% a altura da viga e também os custos com fundação, de acordo com o Centro Brasileiro de Construção em Aço (CBCA). Dentre outras vantagens, é evidenciado assim as razões que incentivam a sua utilização.

A relevância do conhecimento das suas propriedades é crucial para as estruturas metálicas. São passíveis de avaliação: ductilidade, fragilidade, resiliência, tenacidade, dureza, efeito sobre temperaturas elevadas, fadiga e corrosão.

A capacidade do material de se deformar sob a ação de cargas, entende-se por ductilidade. As ações dúcteis sofrem deformações plásticas capazes de redistribuir as tensões, quando sujeitos a tensões locais elevadas. Além desse efeito local, esta conduz a mecanismos de ruptura acompanhados de grandes deformações que fornecem avisos da atuação de cargas altas.

Baixas temperaturas ambientes, efeitos térmicos locais causados por soldas, tornam os aços frágeis por suas influências. Os materiais frágeis se rompem bruscamente, sem avisos prévio, logo, vislumbra-se o conceito de fragilidade. Isso é alarmante do ponto de vista construtivo, muitos acidentes com navios e outros casos ocorreram por essa propriedade, decorrente do processo de solda inadequado.

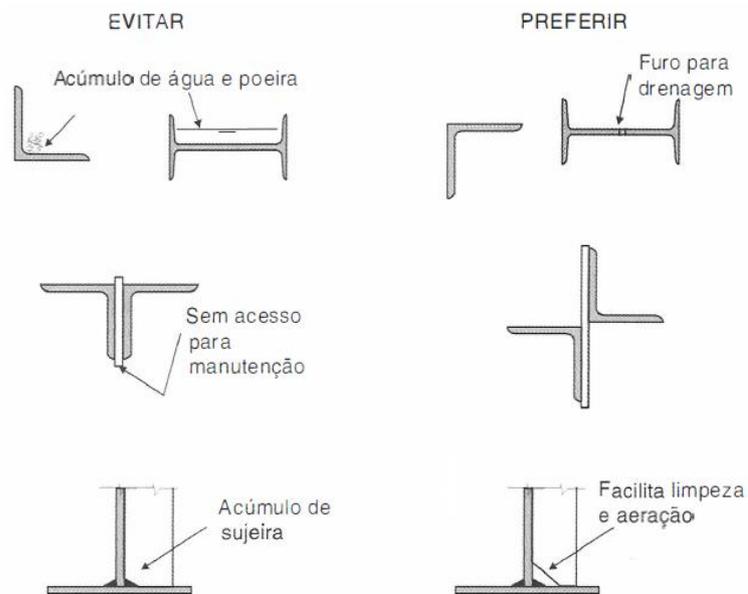
Resiliência é a capacidade de absorver energia no regime elástico ou de restituir energia mecânica absorvida. Módulo de resiliência é a quantidade de energia elástica que pode ser absorvida por unidade de volume de um determinado metal tracionado. Já tenacidade, é a energia total, elástica e plástica que o material pode

absorver também por unidade de volume, até a sua ruptura. Essas duas propriedades são semelhantes porém tem parâmetros diferentes.

Em termos de resistência, temos a dureza, que consiste na resistência à abrasão; a fadiga, diz referência a ruptura dos materiais sob efeito de um ciclo repetitivo de tensões que geram esforços, sendo determinante no dimensionamento de peças sob efeitos dinâmicos importantes, como por exemplos pontes.

A corrosão é preponderante no processo de reação do aço em contato com o meio ambiente, promove a perda de seção das peças e é uma das principais causas de colapso, as medidas na Figura 2 podem ser tomadas para evitar esses problemas.

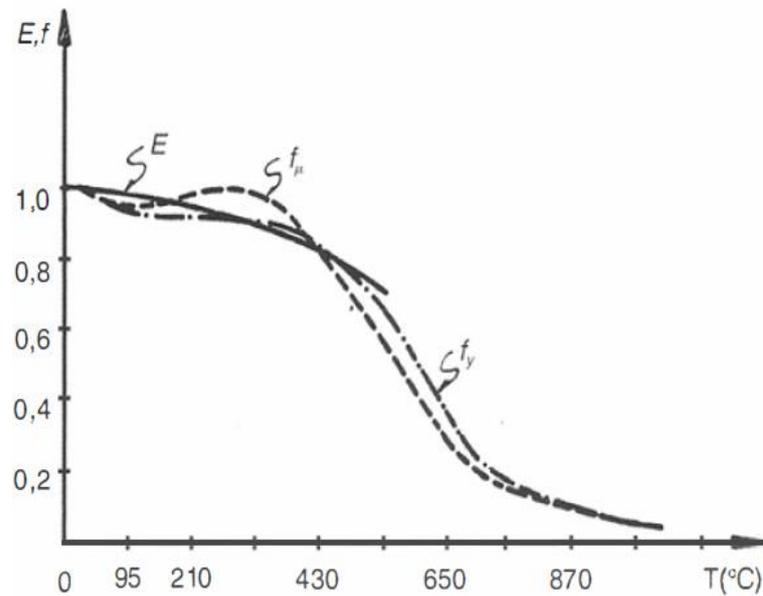
**Figura 2** – Detalhes preventivos para corrosão em perfis expostos a intempéries.



Fonte: PFEIL, 2009.

Por fim, pode-se dizer que as temperaturas elevadas modificam as propriedades físicas do aço. Temperaturas maiores que 100° C tendem a alterar o limite de escoamento e ruptura, tornando o diagrama tensão x deformação arredondado, observado na Figura 3. Quando as temperaturas chegam a ser superiores 250°C podem provocar fluência.

**Figura 3** – Variação de módulo de elasticidade e resistência com a temperatura.



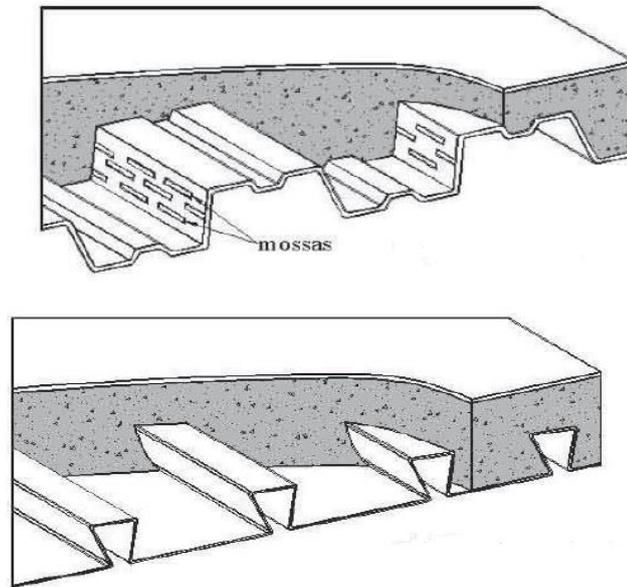
Fonte: PFEIL, 2009.

## 2.2. APLICAÇÃO DE LAJES MISTAS EM *STEEL DECK* E SUA COMPOSIÇÃO

As lajes *steel deck* tem suas fôrmas de aço embebidas ao sistema de sustentação dos carregamentos. Antes da cura do concreto, funciona como suporte das cargas permanentes e sobrecargas e após a cura, como parte da armadura de tração da laje. Conforme o manual de estruturas mistas (QUEIROZ, PIMENTA & MARTINS, 2010), sua fôrma tem o dever de ocasionar a transferência do cisalhamento longitudinal na interface entre o aço e o concreto por meio de:

- Ligação mecânica por mossas nas fôrmas de aço trapezoidais;
- Ligação por atrito devido ao confinamento do concreto nas fôrmas de aço com cantos reentrantes.

**Figura 4** – Forma trapezoidal e forma reentrante, respectivamente.



Fonte: QUEIROZ, PIMENTA & MARTINS, 2010.

Não se permite que a aderência química natural entre o aço e o concreto seja determinante no cisalhamento longitudinal. Com isso, são indicados métodos para garantir o comportamento misto, além dos anteriormente citados, como por exemplo, os conectores de cisalhamento tipo pino com cabeça, conhecidos como *stud bolts*.

**Figura 5** – Conector *stud bolt*.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Os *stud bolts* são responsáveis pela ligação entre a laje e a viga desse tipo de estrutura mista. Porém, nas ligações entre viga e coluna, entre vigas, emenda de colunas ou vigas, apoio de colunas, podem ser considerados três tipos diferentes, com base em Pfeil, 2010:

- Ligação rígida: tem rigidez suficiente para manter praticamente constante o ângulo entre peças (rotação quase nula) para qualquer nível de carga, até atingir o momento resistente da ligação;
- Ligação flexível: permite a rotação relativa entre as peças com um comportamento próximo ao de uma rótula, e transmitindo um pequeno momento fletor;
- Ligação semi-rígida: possui comportamento intermediário entre os dois casos anteriores.

Nas ligações rígidas são considerados como pórticos com estabilidade para cargas verticais e horizontais e contendo rigidez lateral dependente da rigidez a flexão dos elementos: viga e pilar, e os deslocamentos horizontais mantêm-se pequenos.

As estruturas com ligações viga-pilar tendem a ser flexíveis, são estáveis somente para ação de cargas verticais. De forma a combater às ações horizontais, os pilares funcionam isolados, sem considerar como pórtico, compreendendo-se assim o uso de contraventamentos, como o ilustrado na Figura 6.

**Figura 6** – Contraventamento do tipo K utilizado em obra de um flat em Aracaju-SE.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Para as vigas, são utilizados os perfis laminados e dispostos abaixo da chapa nervurada recebendo diretamente as suas cargas, ligados por conectores. Em geral, as primeiras a receberem esse carregamento são as vigas secundárias e as que recebem em seguida são as vigas primárias, transferindo os esforços, finalmente, para os pilares. Exemplifica-se através da Figura 7 o contexto tratado anteriormente, assim como a ilustração dos pilares.

**Figura 7** – Disposição: chapa nervurada de aço, vigas primárias, vigas secundárias e pilares.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Em geral, utiliza-se a armadura de retração volumétrica do concreto disposta ao longo de toda a laje (observe a Figura 8), e age contra a fissuração promovida pela retração do concreto. Denota-se que é essencial o acréscimo de armaduras negativas sobre as vigas secundárias ao considerar a influência dos momentos negativos, veja a Figura 9.

**Figura 8** – Armadura de compressão, usando tela TQ (tela quadrada).



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 9** – Armadura complementar para combate de momento fletor negativo sobre viga.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Esse tipo de laje combate o momento fletor positivo com grande proeza, atendendo as cargas solicitantes embasadas em normas. Apesar disso, em algumas oportunidades, surge a necessidade de armaduras positivas adicionais, que são dispostas longitudinalmente nas ondas baixas da chapa, como na Figura 10.

**Figura 10** – Armadura adicional de combate a momento fletor positivo.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

As lajes *steel deck*, são tão aplicáveis quanto as convencionais, o que é adequadamente explícito no contexto anterior. A vedação é facilmente contornada com o auxílio de alvenaria em blocos de cerâmica e outros que sejam enquadrados nesse sentido. A prova disso são as próximas figuras que demonstram a variabilidade de suas aplicações. Exemplos: acesso a um pavimento de garagem para veículos, marquises e possibilidade de uso de escadas em estrutura mista, respectivamente Figuras 11, 12 e 13.

**Figura 11** – Acesso a pavimento de garagem.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 12** – marquises (balanço).



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 13** – Escada em estrutura mista.



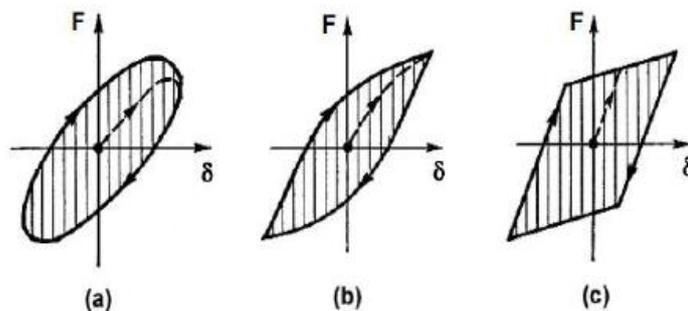
Fonte: Acervo dos autores, 2018.

### 3. CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS MATERIAIS VISCOELÁSTICOS (MVE)

Segundo Santos (2007), a característica peculiar dos materiais viscoelásticos é combinação das atividades elásticas e viscosas em um mesmo material, implicando dizer, que estes retornarão as formas originais após ciclos de deformações, com certa energia perdida sob a forma de calor. Os MVE's tem sido utilizados na fabricação de dispositivos denominados amortecedores viscoelásticos, almejando a redução de amplitudes de deslocamento e aceleração que ocorrem em estruturas de edifícios altos, devido ação do vento, por exemplo.

A combinação entre a elasticidade e a viscosidade relacionadas anteriormente, podem ser compreendidas através da representação de ciclos histeréticos. É possível retratar como observado na Figura 14, a linearidade, a não linearidade e a elasto-plasticidade, respectivamente, representados.

**Figura 14** – (a) linearidade do material viscoelástico, (b) não linearidade do material inelástico e (c) bi linearidade de material elasto-plástico.



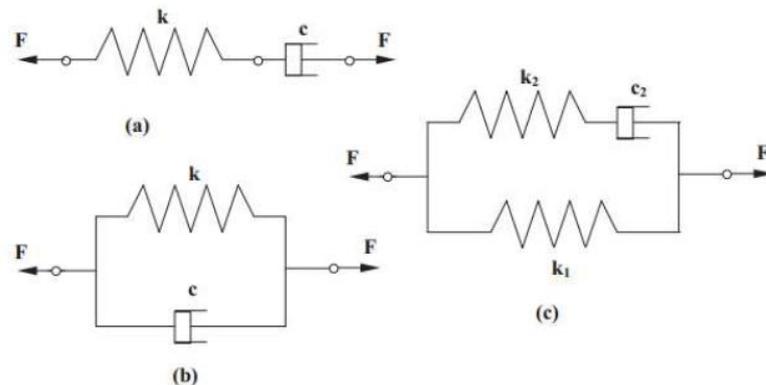
Fonte: LAZAN, 1968, *apud* SANTOS, 2007.

Os MVE's que possuem comportamento linear são representados em forma de elipse, como apresentado na Figura (14.a). De acordo com Lazan (1968) *apud* Santos (2007), o fenômeno em comum à curva força-deslocamento ( $F \times \delta$ ), ocasiona a formação da histerese, em que a área compreende a energia dissipada pelo material.

O ciclo histerético típico de amortecimento viscoso-linear (Figura 14.a) será utilizado neste trabalho para estudo da avaliação do desempenho de amortecedores viscoelásticos. Esses materiais podem ser caracterizados como

modelos mecânicos com associação de molas lineares e amortecedores viscosos (Figura 15).

**Figura 15** – Modelos mecânicos unidimensionais que caracterizam o MVE: (a) Modelo de Maxwell, (b) Modelo de Voigt-Kelvin e (c) Modelo para MVE do tipo borrocha.



Fonte: VASCONCELOS, 2003, *apud* DANTAS, 2017.

Neste modelo mecânico, a mola representa a contribuição elástica do material, a qual apresenta resposta imediata a uma ação mecânica e é capaz de restabelecer as dimensões originais quando esta ação é removida. Já o amortecedor corresponde a contribuição viscosa do material, que produz resposta retardada a ação mecânica e não recupera as dimensões originais quando esta é removida.

Os amortecedores viscoelásticos são empregados de forma que a energia mecânica proveniente da estrutura seja convertida em calor. Dessa forma, faz com que aconteça a redução da amplitude do movimento de vibração. Essa transferência de energia ocorre por meio do material viscoelástico, que é aplicado basicamente por três modos mostrados nas Figuras 16 e 17.

Na Figura 16.a, o amortecimento é provocado pela deformação extensional da camada de material viscoelástico. Nesta configuração é realizada a aplicação direta de material viscoelástico na superfície que está sob vibração (placas ou vigas). A Figura 16.b demonstra a situação onde aproximadamente toda a deformação ocorre devido ao cisalhamento e possui pelo menos duas camadas de MVE interligadas a três chapas rígidas.

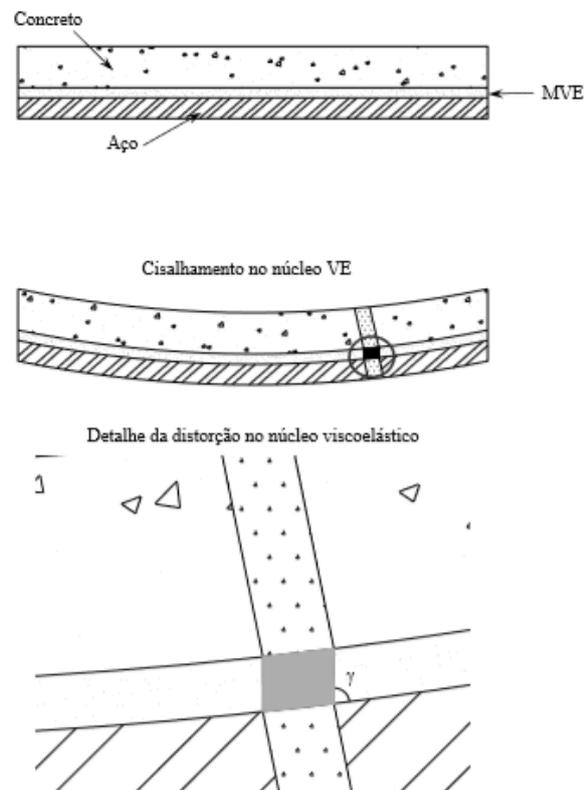
**Figura 16** – Diferentes configurações para amortecedores viscoelásticos: (a) simples camada de MVE, (b) duplo sanduíche.



Fonte: VASCONCELOS, 2003, *apud* DANTAS, 2017.

Uma das formas de utilização do MVE é introduzi-lo na estrutura através do contato direto com os elementos estruturais, sistema este conhecido como sanduíche (Figura 17), recomendado para pisos e tabuleiro de pontes (BATTISTA, 2000 *apud* SANTOS, 2007).

**Figura 17** – Esquema típico de estrutura tipo sanduíche



Fonte: SANTOS, 2007.

De início é importante correlacionar matematicamente algumas situações: quando o material viscoelástico é submetido a cargas harmônicas cisalhantes ao considerar que o corpo seja perfeitamente elástico e quando é considerada apenas a viscosidade do mesmo.

Ao analisar o efeito cisalhante puro, evidencia-se a produção de uma distorção ( $\gamma$ ), representada por:

$$\gamma = \gamma_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.1)$$

Em que  $\gamma_0$  é a amplitude de distorção e  $\omega$  a frequência excitadora.

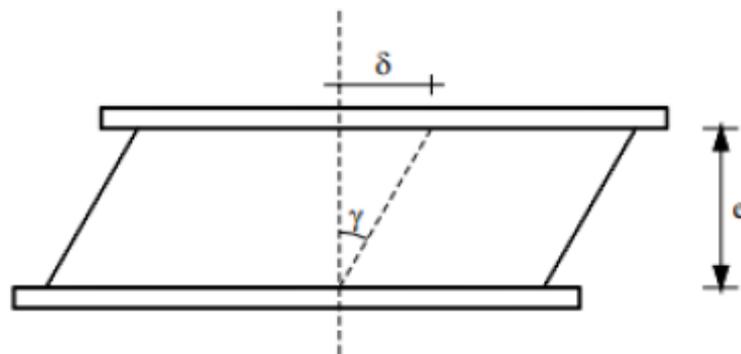
Considerando que o MVE se comporta alternadamente entre características elásticas e viscosas, denotam-se duas equações matemáticas respectivamente:

$$\tau = \tau_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3.2)$$

$$\tau = \tau_0 \text{cos}(\omega t) \quad (3.3)$$

Ressalta-se, então, que para o comportamento elástico denota-se  $\tau_0 = G\gamma_0$  como sendo a magnitude cisalhante e  $G$ , por sua vez, o módulo de armazenamento elástico transversal. E para o comportamento viscoso,  $\tau_0 = \mu\omega\gamma_0$  como sendo o coeficiente de cisalhamento. A deformação explícita através dessas relações pode ser denotada como na Figura 18:

**Figura 18** – Deformação imposta em um núcleo viscoelástico.



Fonte: SANTOS (2007) *apud* DANTAS (2018).

Nota-se que na primeira consideração, em que verifica-se a elasticidade, está em fase com relação a deformação, enquanto na equação referente a segunda consideração, que correlaciona-se à viscosidade, impõe-se defasagem de  $90^\circ$ . Define-se assim, que um MVE conduzirá a deformação  $\gamma$  defasada por ângulo de fase ( $\varphi$ ), comportando-se de  $0^\circ$  a  $90^\circ$ , relatando uma divisão de componentes: uma fase com deformação e a outra com defasagem de  $90^\circ$  (SANTOS, 2007 *apud* DANTAS, 2017). Logo, expõe-se a equação abaixo:

$$\tau = \tau_0 \text{sen}(\omega t + \varphi) = \gamma_0 [G'(\omega) \text{sen}(\omega t) + G''(\omega) \text{cos}(\omega t)] \quad (3.4)$$

Em que  $G'$  é o módulo transversal de armazenamento e  $G''$  é o módulo transversal de perda, expressos por:

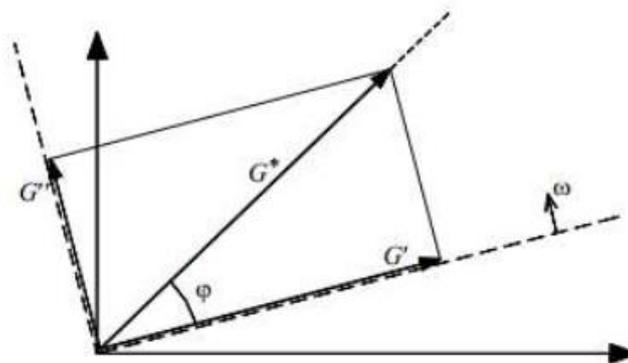
$$G' = |G^*| \text{cos}(\varphi) \quad (3.5)$$

$$G'' = |G^*| \text{sen}(\varphi) \quad (3.6)$$

Agora,  $G^*$  é o módulo de elasticidade complexo ilustrado na Figura 19 e representado por:

$$G^* = G' + iG'' \quad (3.7)$$

**Figura 19** – Representação da decomposição do módulo elástico transversal sob frequência de excitação.



Fonte: SANTOS, 2007 *apud* DANTAS, 2017.

Por fim, para encontrar a energia produzida por um sistema MVE, são utilizadas as equações (3.4) e (3.1). Entende-se assim que a energia de deformação em um volume unitário é dada por:

$$E = \int \tau(t) d_\gamma(t) \quad (3.8)$$

ou, ainda,

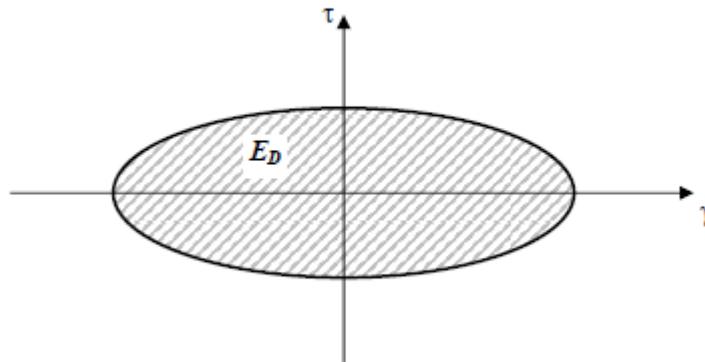
$$E = \gamma_0^2 G'(\omega) \int \sin(\omega t) \cos(\omega t) d(\omega t) + \gamma_0^2 G''(\omega) \int \cos^2(\omega t) d(\omega t) \quad (3.9)$$

Pode-se considerar apenas a parcela viscosa do material e integrando para um círculo de deformação, temos:

$$E_D = \pi \gamma_0^2 G''(\omega) \quad (3.10)$$

Onde  $E_D$  é a energia dissipada para um volume unitário de material viscoelástico e representa a área de um elipse (Figura 20).

**Figura 20** – Ciclo histerético de um material puramente viscoso.



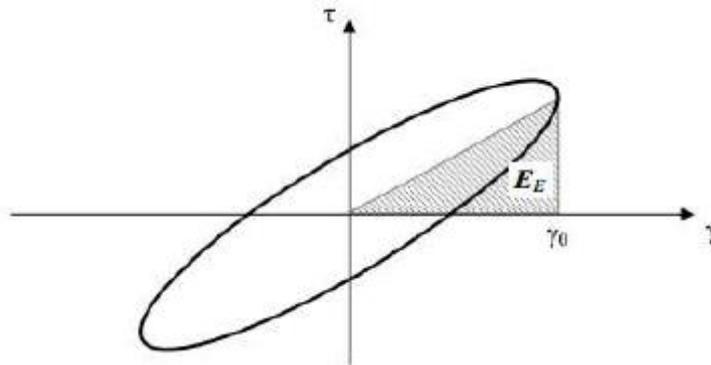
Fonte: SANTOS, 2007.

E considerando apenas uma parcela elástica e integrando também apenas para um círculo de deformação, tem-se:

$$E_E = \frac{1}{2} \gamma_0^2 G'(\omega) \quad (3.11)$$

Visualiza-se que  $E_E$  é a energia referente à área sob a reta que define a rigidez do sistema com material viscoelástico ( $k' = F/\delta$ ), tal reta intercepta o ciclo no ponto máximo de deslocamento, passando pela origem dos eixos, como demonstra a Figura 21.

**Figura 21** – Energia elástica de um material viscoelástico.



Fonte: SANTOS, 2007 *apud* DANTAS, 2017.

Também se pode entender a atenuação do movimento através de uma taxa de amortecimento (ou fator de perda,  $\eta$ ) observado na equação seguinte:

$$\eta = \frac{G''(\omega)}{G'(\omega)} \quad (3.12)$$

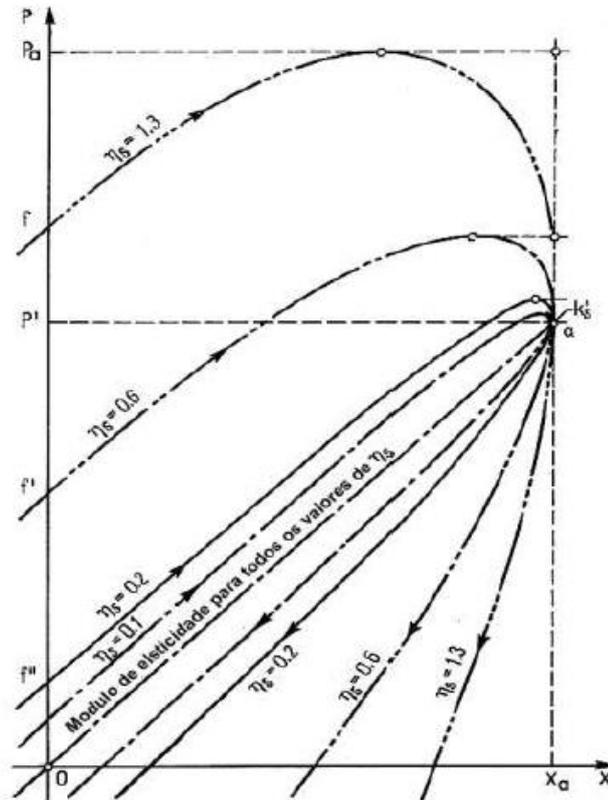
Utilizando as equações de energia dissipada para volume unitário e energia referente à área sob a reta demonstrada graficamente, representa-se o fator de perda por:

$$\eta = \frac{E_D}{2\pi E_E} \quad (3.13)$$

$E_D/E_E$  é a taxa de dissipação de energia.

Com esta equação é possível perceber o fator de perda é diretamente proporcional à energia dissipada  $E_D$ . Como essa energia está ligada a área do ciclo histerético, pode-se dizer que o fator de perda é determinante para a abertura desse ciclo (Figura 22). Porém essa afirmação só terá veracidade se a energia elástica não for alterada ao final do ciclo (SANTOS, 2007 *apud* DANTAS, 2017).

**Figura 22** – Ciclos Histeréticos para diversos valores do fator de perda.



Fonte: LAZAN, 1968 *apud* Dantas, 2017.

### 3.1. ALGUNS FATORES QUE INFLUÊNCIAM NO COMPORTAMENTO DOS MVE's

Os principais fatores que influenciam o comportamento dos sistemas amortecedores com material viscoelástico são a frequência, a temperatura e a espessura do núcleo viscoelástico. Outros efeitos, não menos importantes, também podem interferir na resistência e na durabilidade desses materiais: fadiga por variações cíclicas de deformação; envelhecimento por exposição às intempéries, etc. (VASCONCELOS, 2003 *apud* SANTOS, 2003).

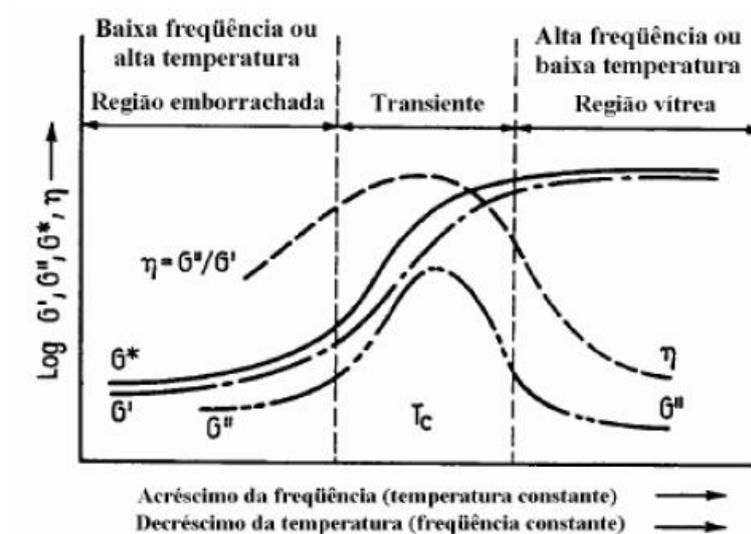
#### 3.1.1. Temperatura e frequência

A superposição dos efeitos provenientes das variações de ambos são importantes na caracterização do MVE, bem como no projeto e na fabricação de

atenuadores viscoelásticos (AVE).

Três regiões podem ser observadas na variação do módulo de elasticidade e do fator de perda, para uma determinada frequência constante, ou vice-versa (ver Figura 23).

**Figura 23** – Variação do módulo de armazenamento  $G'$ , módulo de perda  $G''$  e fator de perda  $\eta$  de um material viscoelástico linear.



Fonte: LAZAN, 1968 *apud* SANTOS, 2007.

De acordo com Vasconcelos (2003) *apud* Santos (2007), interpreta-se que:

- A região emborrachada apresenta valores baixos para os parâmetros a serem analisados, levando a uma baixa dissipação de energia. Esta região é raramente utilizada para sistemas de amortecimento devido às altas temperaturas, não se adequando assim, aos propósitos da engenharia estrutural, salvo quando presença de incêndio;
- A região central apresenta valores máximos para o fator de perda, além de rápido crescimento do módulo de armazenamento. É, portanto, a faixa ideal de trabalho dos materiais viscoelásticos;

- A última região, é a vítrea. O alto valor do módulo de armazenamento torna o comportamento do material viscoelástico semelhante ao elástico rígido.

### **3.1.2. Influência da espessura do núcleo viscoelástico**

A espessura da camada viscoelástico está ligada diretamente ao nível de amortecimento que se deseja suprir ao mecanismo, de acordo com o sistema estrutural. No entanto, a rigidez do mecanismo eventualmente será alterada com o aumento dessa espessura. Portanto, ao aumentar o volume de material viscoelástico deve-se levar em consideração a rigidez do mecanismo proporcionado pelo aumento da camada visco elástica (LAZAN 1968, *apud* SANTOS 2007).

Por outro lado a diminuição da espessura do material utilizado proporciona maior cisalhamento no núcleo. Mecanismos muito rígidos podem alterar a funcionalidade da estrutura, redistribuindo os esforços (SANTOS, 2007).

#### 4. PRINCÍPIO À DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

A dinâmica, como parte da Mecânica Clássica, consiste no reconhecimento do movimento de partículas, sistemas de partículas e corpos rígidos, em influência das forças. E foi através dela que se desenvolveu a Dinâmica das Estruturas.

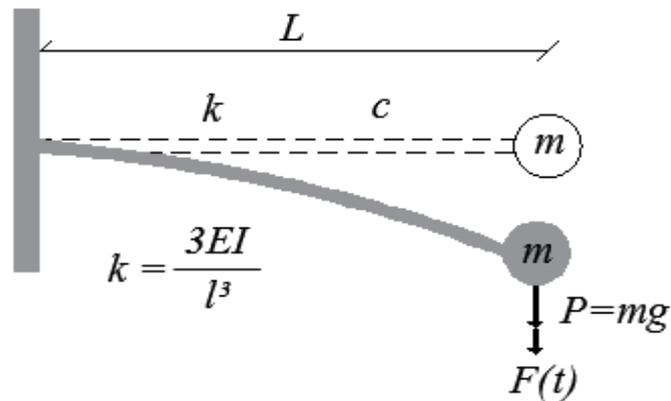
É de suma importância o estudo dinâmico para que se tenha um entendimento adequado dessas pesquisas, que geralmente são mais aprofundadas e complexas que as mais usuais. A complexidade se dá através da construção de modelos matemáticos analíticos, de forma que seja possível simular comportamentos devido às diversas ações externas, variadas no tempo, e respostas do sistema estrutural, são elas: acelerações, deslocamentos e velocidades. Exige-se adoção de princípios, leis físicas e conjectura matemática de natureza aproximativa, transmitindo simplicidade e acurácia, sob a responsabilidade do engenheiro.

Ao contrário da estática, que considera as forças de inércia como desprezíveis, uma averiguação dinâmica importa mais experiência e consecutivamente conhecimentos. Nem sempre é possível contornar as considerações com simplicidade. Assim, utilizar ferramentas computacionais é a melhor solução.

Para o entendimento dos *softwares* implementados, tem-se como auxílio o método dos elementos finitos. E como solução que reverta os efeitos vibratórios, implantam-se atenuadores de vibrações, ocasionando melhorias através da redução nas amplitudes das oscilações que devem ser mensuradas.

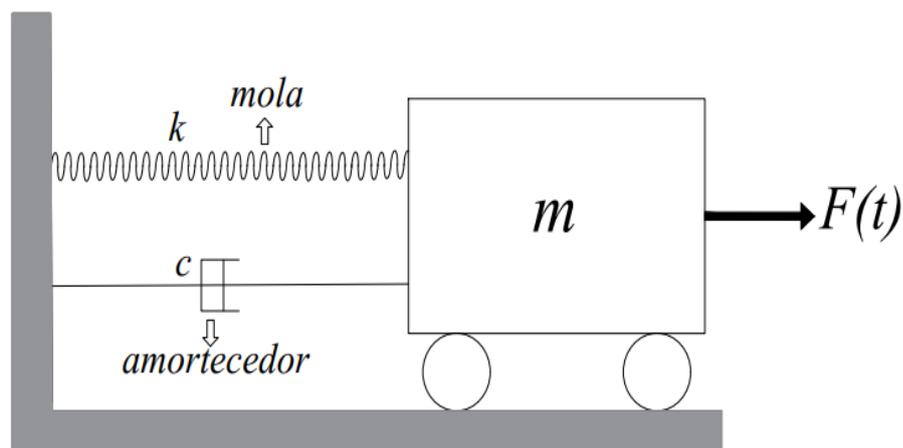
Esclarecendo essas divergências, realiza-se o raciocínio com base nas Figuras 24 e 25, que apresentam a idealização de uma viga em balanço como oscilador simples amortecido, respectivamente.

**Figura 24** – Viga em balanço.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 25** – Idealização de oscilador simples amortecido.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Para compreensão destas figuras temos que  $k$  é o coeficiente de rigidez a flexão da viga de massa  $m$  concentrada extremidade livre da viga  $C$  é o coeficiente de amortecimento viscoso e  $F(t)$  é a força excitadora, sendo que na representação do oscilador, a mola é considerada sem massa, e o elemento de dissipação de energia é um cilindro com cabeça de pistão (SORIANO, 2014, p. 77). Além disso,  $E$  é o módulo de elasticidade (longitudinal) ou módulo de Young, característico do material;  $I$  a inércia da peça e  $L$  é o comprimento da viga.

A mola, no entanto, conserva energia potencial e o amortecedor é um artifício que dissipa a energia gradualmente, através da dissipação de calor.

Considera-se que a força excitadora  $F(t)$  induz o sistema, que por sua vez, oscila, a produzir uma resposta acumulando energia cinética. Logo, a alternância entre as energias cinética e potencial é o que dita a vibração, e por fim, essa energia é dissipada em partes a cada ciclo de oscilação, através do sistema amortecido.

#### 4.1. EQUAÇÃO DO MOVIMENTO

A dedução do movimento surgiu desde os primórdios, evidencia-se historicamente que Galileu Galilei, aos seus 19 anos, constatou similaridade das oscilações de um Candelabro de Pisa e a sua pulsação. Verificou que o período do movimento pendular emancipa da massa oscilante e da amplitude da oscilação, e fez uso do pêndulo em grandeza de tempo. Encorajado por essa descoberta, analisou de forma ordenada e com experimentos, o movimento dos corpos na imediação da terra, entre outras relevantes contribuições ao início da Mecânica Clássica (SORIANO, 2014, p. 5).

Dispõe-se como lenda que Isaac Newton, aos 23 anos, quando atento a queda de uma maçã percebeu o fenômeno da atração entre corpos. Com esse entendimento associou ao movimento dos corpos com as forças que são empregadas neles e entre muitas outras contribuições à ciência. Conceberam-se através desse contexto, quatro leis ou princípios físicos que fundamentam a Mecânica Clássica.

A segunda lei de Newton, também conhecida como princípio fundamental da dinâmica, descrita como a derivada, em relação ao tempo, do produto da massa de uma partícula pela velocidade da mesma. Tem uma resposta proporcional à resultante das forças que lhes são aplicadas e possui a direção desta.

$$F \propto \frac{d}{dt} \left( m \frac{du}{dt} \right) \quad (4.1)$$

Onde  $F$  é a resultante atuante sobre o corpo,  $t$  designa a variável tempo,  $m$  é massa do corpo,  $u$  representa o vetor deslocamento (translacional). Se a massa  $m$  for constante, essa equação se limita a:

$$F = m \frac{d\ddot{u}}{dt}, \text{ resultando em:}$$

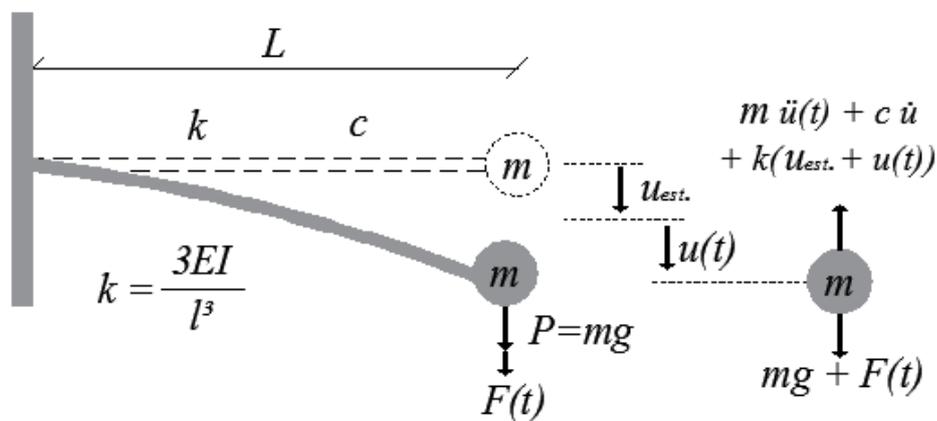
$$F = ma \quad (4.2)$$

Em que a derivada segunda indica o vetor aceleração.

É possível estabelecer algumas equações que definem o movimento (Figura 26). Em estática, respeita-se a Lei de Hooke: a força permanece constante, não variante no tempo.

$$F = ku_{est} \quad (4.3)$$

**Figura 26** – Viga em balanço e diagrama de corpo livre.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

O deslocamento estático  $u_{est}$  ocorre devido a um peso e  $u(t)$  compreende o deslocamento dinâmico proveniente da  $F(t)$ . A partir do diagrama de corpo livre demonstrado na Figura 26, é estabelecido a seguinte equação:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k[u_{est} + u(t)] = F(t) + mg \quad (4.4)$$

Cancelam-se os fatores comuns nos dois membros equacionados anteriormente, pois  $u_{est} = mg/k$ , resultando na equação de movimento do oscilador simples amortecido e não amortecido equações 4.5 e 4.6:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku(t) = F(t) \quad (4.5)$$

$$m\ddot{u} + ku(t) = F(t) \quad (4.6)$$

O deslocamento é determinado com relação à configuração neutra. E a resposta dessa equação tem como base determinado deslocamento, sendo obtidas a velocidade e a aceleração, permitindo a designação das forças elásticas de amortecimento e de aceleração.

A partir da equação diferencial parcial (4.4) tem-se conhecimento da existência das forças de inércia, forças de amortecimento e forças estáticas presentes em um corpo rígido qualquer, além da força externa que varia ao decorrer do tempo. As forças internas são compostas pelas forças estáticas e as forças de inércia podem ser consideradas paralelamente as forças de amortecimento. Compõe-se o primeiro membro da equação com base no princípio dos trabalhos virtuais. Já no segundo membro são expressas as forças ativas e reativas, ou seja, forças externas.

Nos sistemas reais existe a dissipação de energia, que por sua vez reduz as amplitudes das vibrações, sendo referenciadas através da oposição ao movimento em forma de força.

#### **4.2. VIBRAÇÃO LIVRE E FORÇAS EXTERNAS QUE ATUAM NO CORPO RÍGIDO**

Quando a força externa é nula e o sistema não tem amortecimento, diz-se vibração livre não amortecida (SORIANO, 2014, p. 43). Dessa forma é compreendida a frequência natural de um corpo, sendo importante para que se possam ser feitas comparações com agentes externos que influenciam esta, em determinado movimento. Com base nas equações 4.5 e 4.6, formulam-se as equações para a vibração livre do sistema. Para a não amortecida, adota-se a Equação 4.8.

$$m\ddot{u} + ku(t) = 0 \quad (4.8)$$

Com base nisto, é que pode ser compreendida a frequência natural de um determinado sistema. Determina-se que  $u$  é:

$$u = u_0 \text{sen}(\omega t) \quad (4.9)$$

Correlaciona-se com derivada primeira e derivada segunda respectivamente (Equações 4.10 e 4.11):

$$\dot{u} = u_0 - \omega \cos(\omega t) \quad (4.10)$$

$$\ddot{u} = u_0 - \omega^2 \sin(\omega t) \quad (4.11)$$

A partir disto, pode-se substituir na Equação 4.8, obter a expressão da Equação 4.12:

$$m[u_0 - \omega^2 \sin(\omega t)] + ku_0 \sin(\omega t) = 0 \quad (4.12)$$

Eliminando as igualdades da equação, pode-se afirmar o expressão na Equação 4.13:

$$-m\omega^2 + k = 0 \quad (4.13)$$

A frequência natural é pode ser entendida como na Equação 4.14:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.14)$$

A oscilação simples não amortecida é aquela em que um corpo permanece em vibração mesmo após cessada a ação externa, sendo considerado como um sistema conservativo. Já a amortecida, envolve a geração e irradiação de calor e depende, da interação com o meio ao qual está exposto, da presença humana, de materiais não estruturais e de possíveis dispositivos a serem dispostos com postura de dissipador de energia.

Nesse contexto, pede-se equações de movimento de um modelo estrutural, que no exemplo do oscilador simples amortecido tem a dedução conceitual:

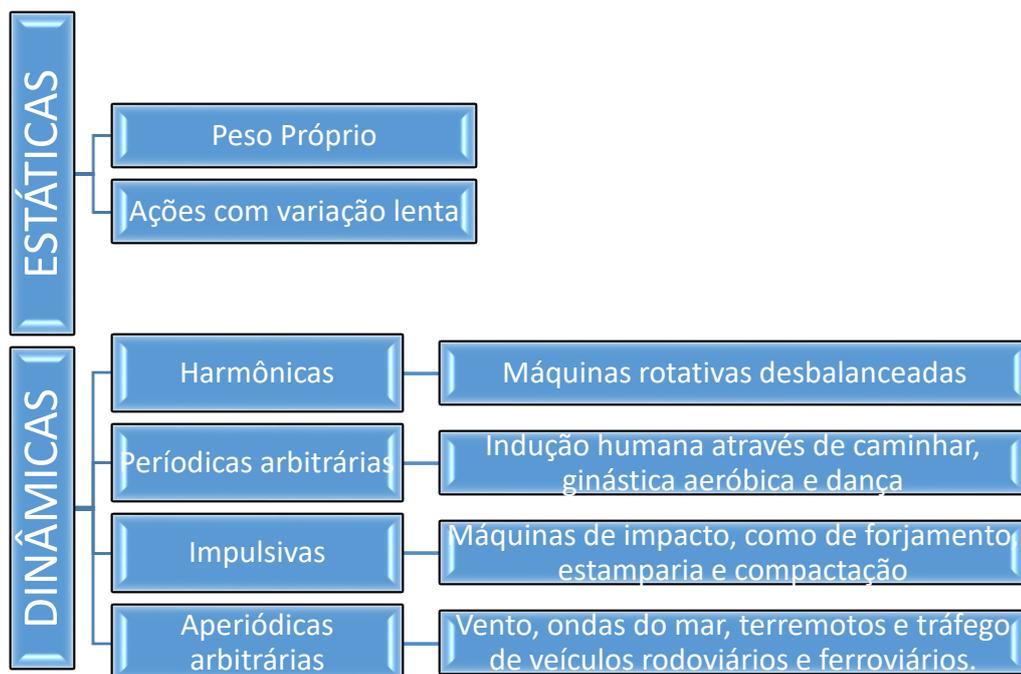
$$F_{in}(t) + F_a(t) + F_{el}(t) = F(t) \quad (4.15)$$

As forças internas são constituídas pelas forças de inércia, de amortecimento e elásticas do sistema, respectivamente  $f_{in}(t)$ ,  $f_a(t)$  e  $f_{el}(t)$ . E as forças externas são representadas por  $f(t)$ . A equação desse movimento oscilador é diferencial de segunda ordem, que por sua vez, gera dificuldade na sua resolução analítica supondo forças irregulares atuantes. Essas forças externas podem ser periódicas ou aperiódicas.

A força de amortecimento pode ter relação direta com o meio ao qual o corpo está inserido, como: ao ar livre, em meio aquoso, em meio viscoso. E também pode ter relação com a histerese, que nada mais é que a propriedade de cada material de dissipar energia. A partir dos meios existentes, o processo de oscilação terá comportamento diferenciado, dissipando energia mais rapidamente ou não, e traz como resultado uma oscilação que depende dessa variação.

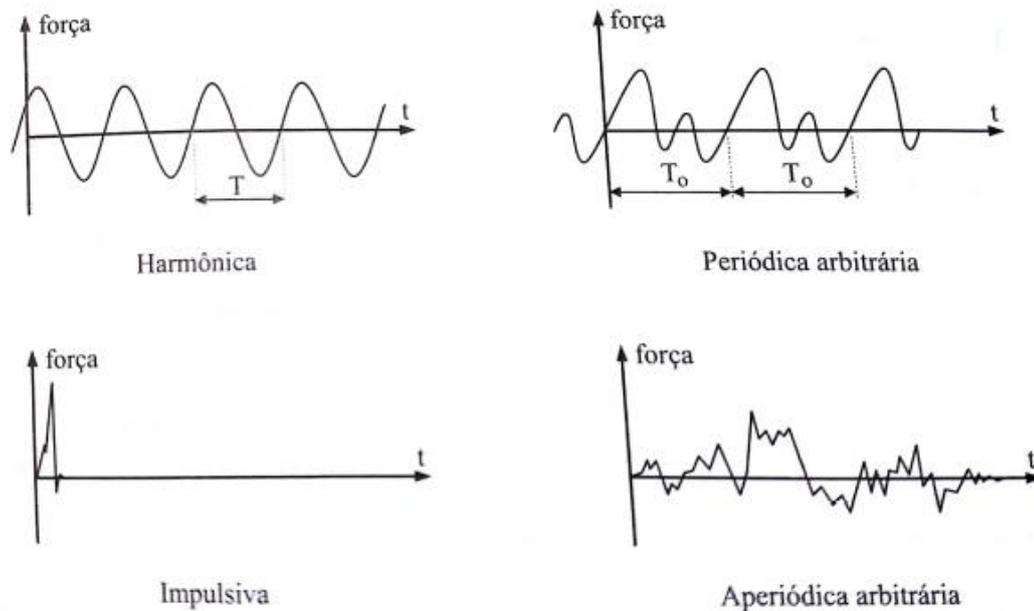
Mais detalhadamente de acordo com Soriano (2014), existe a força harmônica, atuando indefinidamente com configuração repetida em intervalos de tempo iguais (período); as forças impulsivas, que possuem alta intensidade e curta duração (fração de segundo); e as aperiódicas são as que variam arbitrariamente no tempo, sem curta duração. Essas forças se impõem de forma expressa no fluxograma a seguir:

**Figura 27 – Fontes de forças externas em estruturas.**



Segundo Backmann & Amman (1987), em termos generalizados, grande parte das cargas encontradas na engenharia pode ser descrita como dinâmica, pois variam de acordo com o tempo. Praticamente, as cargas variam lentamente podendo ser tratadas como quasi-estática, uma vez que as forças de inércia e amortecimento podem ser desprezados. O tempo e a forma de aplicação são fatores que distinguem carregamentos estáticos dos dinâmicos, e a magnitude dessas forças em função do tempo depende tanto do tipo de excitação quanto das propriedades dinâmicas da estrutura. Essas cargas dinâmicas em função do tempo podem ser expressas graficamente como na Figura 28:

**Figura 28** – Forças dinâmicas.



Fonte: SORIANO, 2014.

### 4.3. FREQUÊNCIA NATURAL ANGULAR E MODOS DE VIBRAÇÃO

A frequência natural ou de ressonância é aquela que é particular ao corpo em vibração livre, determinada pela composição deste. Uma forma de analisá-la consiste em excitar sua frequência de ressonância para que se analisem as respostas, ou seja, os modos que o corpo corresponderá. Para frequência natural angular temos a relação:

$$f = \frac{1}{T} \quad (4.16)$$

Em que,  $f$  é a frequência natural angular e  $T$  é o período. Essa frequência é o inverso do período.

Segundo Rao (2008) seja qual for o movimento que se repita prontamente a um espaço de tempo é denominado “vibração” ou “oscilação” e pode ser categorizado em:

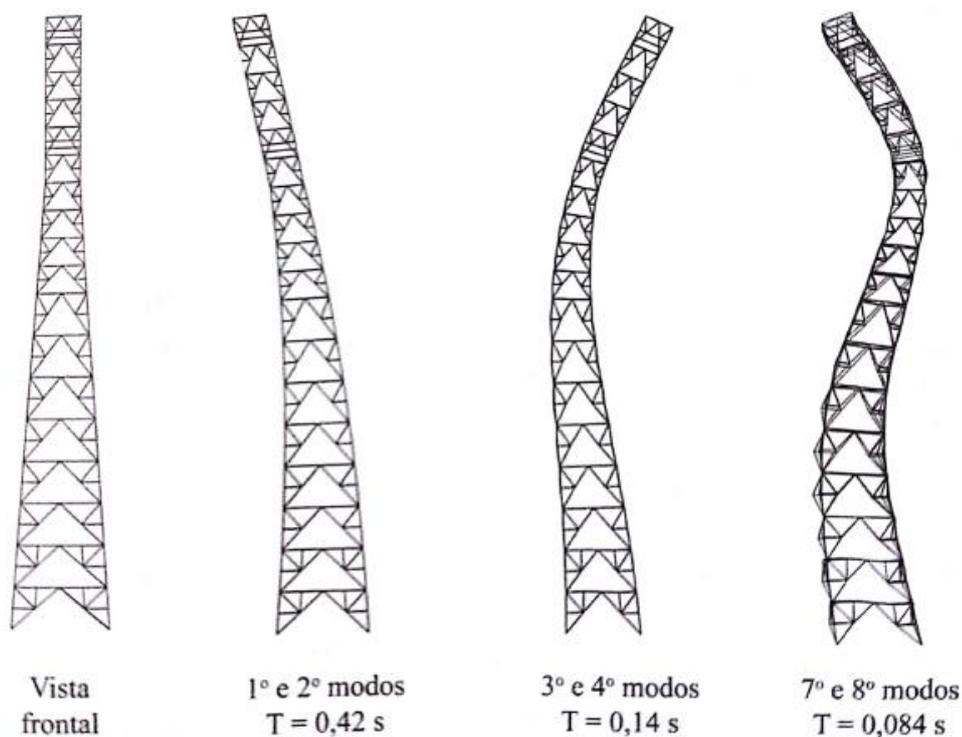
- Vibração livre: O sistema segue a vibrar posteriormente a uma excitação inicial por conta própria sem qualquer força externa agindo sob o corpo.
- Vibração forçada: O sistema oscila em função a forças externas (comumente, forças repetitivas).
- Vibração não amortecida: É dita como uma vibração conservativa, isto é, nenhuma energia é dissipada por atrito ou alguma outra resistência no decorrer da oscilação.
- Vibração amortecida: Ocorre a dissipação de energia no sistema.
- Vibração linear ou não linear: Se os membros essenciais de um sistema oscilatório (massa, mola e amortecedor) agirem linearmente, a vibração é chamada linear, entretanto se algum dos componentes se comportar não linearmente, a vibração resultante é chamada de não linear.
- Vibração determinística: Caso o valor ou grandeza da perturbação incidente sobre um sistema for conhecido, a vibração resultante é designada como determinística.

- Vibração aleatória: Quando é impossível conhecer o valor de excitação em dado instante.

Em efeito das forças axiais em flexão leva-se em consideração através da matriz de rigidez geométrica. As forças de compressão reduzem a rigidez do modelo e, conduzem a frequências naturais menores. Forças de tração aumentam a rigidez e levam a frequências naturais maiores (SORIANO, 2014).

Para melhor entender a performance dos modos de vibração ao longo de suas passagens analíticas, vale a pena constatar a Figura 29.

**Figura 29** – Vista frontal de uma torre e alguns de seus modos naturais de vibração de flexão no plano dessa vista e no que lhe é perpendicular.



Fonte: SORIANO, 2014.

As primeiras frequências naturais são úteis em previsão do comportamento do modelo estrutural sob determinada ação externa. Isso porque as amplitudes de deslocamento aumentam à medida que aquelas frequências se aproximam da frequência preponderante da excitação. Com isso, a correspondente oscilação pode danificar a estrutura e/ou provocar desconforto aos usuários da mesma (SORIANO, 2014).

#### 4.4. RESSONÂNCIA

É de extrema importância conhecer as frequências naturais de uma estrutura. Quando as frequências naturais intrínsecas de cada sistema estrutural, se igualam com as frequências de oscilações que estão sendo geradas na estrutura, dar-se um fenômeno chamado ressonância.

Um conceito relevante chama-se fator de amplificação dinâmica, definido como a razão entre a amplitude da solução particular de deslocamento e o deslocamento pseudo estático, de acordo com Soriano (2014), temos que:

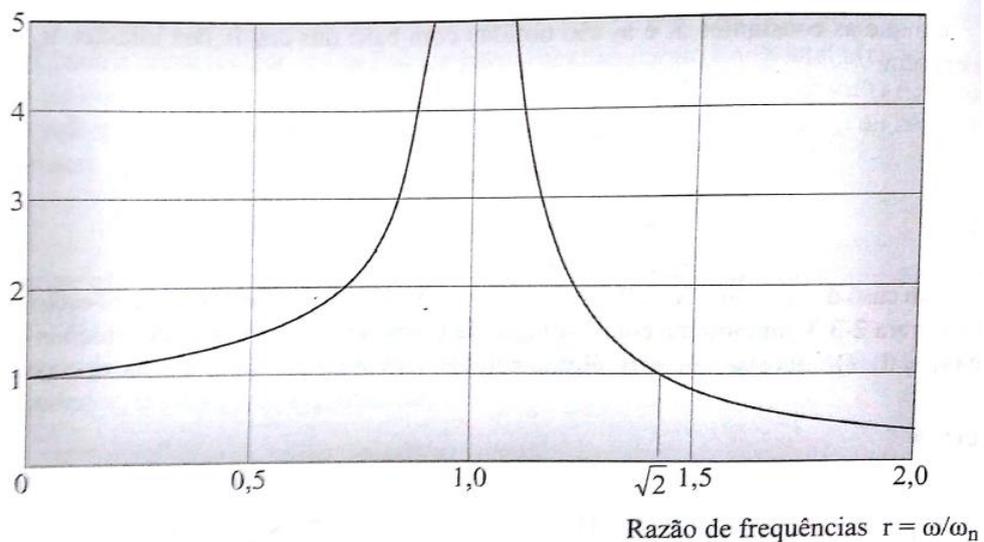
$$Ad = \frac{1}{1-r^2} \quad (4.17)$$

Em que  $r$ , é a razão das frequências natural ( $\omega_n$ ) e forçante ( $\omega$ ).

Ao observar a Figura 30, percebe-se que a amplitude tende ao infinito a medida que a frequência de excitação se aproxima da natural, ou seja, ocorre ressonância ( $\omega_n = \omega$ ).

**Figura 30** – Fator de amplificação dinâmica versus razão de frequências.

Fator de amplificação dinâmica



Fonte: SORIANO, 2014.

Na prática, a energia dissipada é limitante do crescimento desproporcional da amplitude, podendo ainda alcançar valores intoleráveis ao sistema.

Quando um sistema entra em ressonância, torna-se predisposto a vibrar nos picos da amplitude em determinadas frequências ou comprimentos de onda. Até mesmo as forças periódicas de pouca magnitude podem produzir vibrações de alta amplitude, pois há armazenamento de energia. Sendo muito prejudicial as estruturas, havendo possibilidade de colapso.

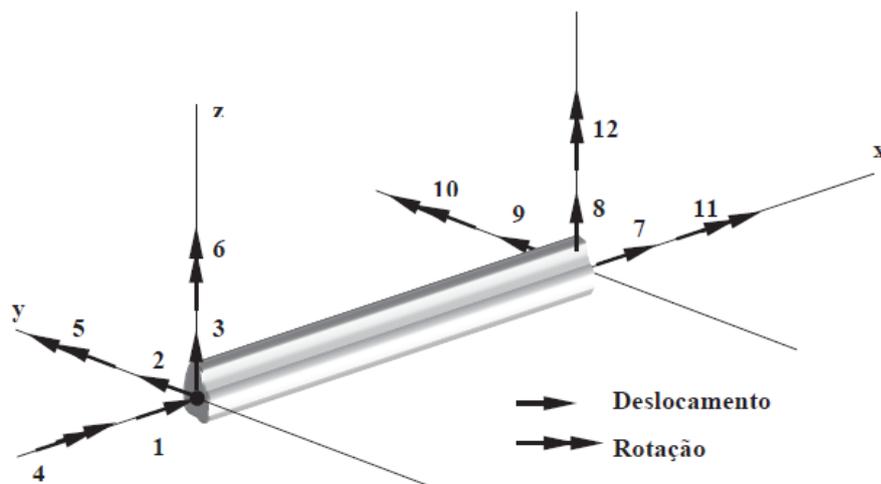
## 5. FERRAMENTA NUMÉRICO-COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DINÂMICA COM O MVE

Os elementos estruturais que serão objetos de análise deste trabalho serão modelados e analisados via o software CONTROLMADS – Controle de Vibrações via Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados. Este programa consiste na utilização do método de elementos finitos para a análise dinâmica com MVE utilizando elementos de barra, placa e sólido (hexaédricos), este último específico para o material de amortecimento. Vale ressaltar que tal software, desenvolvido em linguagem Fortran, foi validado por meio de análise teórico experimental, não apenas com resultados de laboratório, como também ensaios de campo (Observar SANTOS, 2007).

### 5.1. ELEMENTO DE PÓRTICO ESPACIAL

É o elemento tridimensional definido por dois pontos nodais, que possui seis graus de liberdade em cada nó, sendo três deslocamentos e três rotações e o seu comprimento ( $L$ ) é relativamente maior que as dimensões de sua seção transversal.

**Figura 31** – Elemento de pórtico espacial e seus respectivos graus de liberdade.



Fonte: VASCONCELOS, 2003.

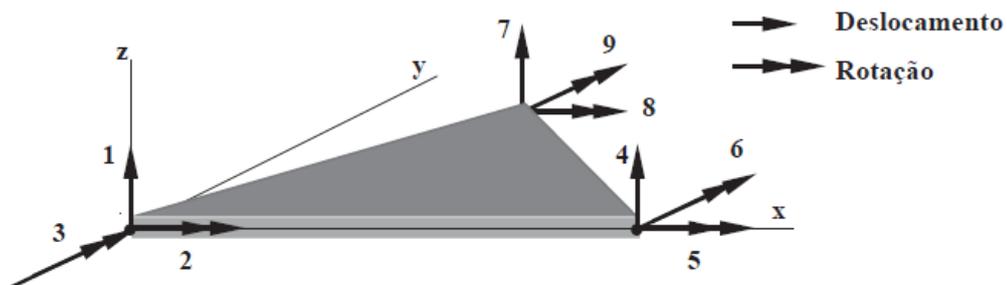
## 5.2. ELEMENTO DE PLACA

Segundo Vasconcelos (2003), um elemento do tipo placa é aquele que possui um elemento plano cuja superfície é relativamente maior do que a espessura, sendo capaz de suportar ações de forças normais ao seu plano médio, e de momentos contidos nele.

Podemos observar dois diferentes elementos do tipo placa: elemento triangular com três nós e elemento retangular com quatro nós (VASCONCELOS, 2003):

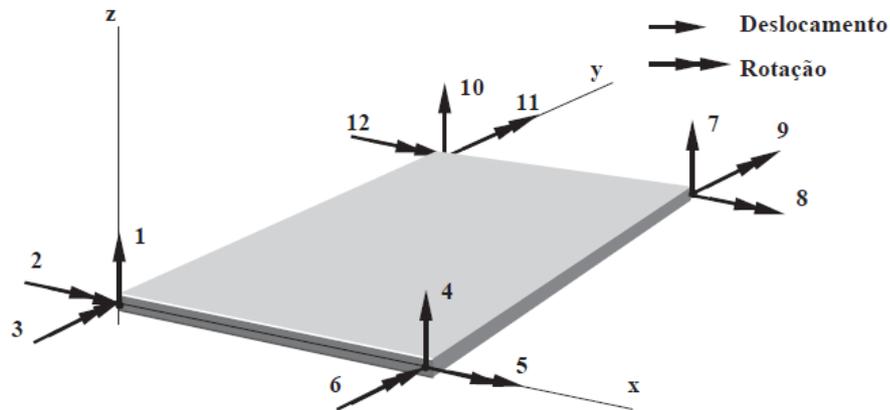
- O elemento triangular de placa empregado no CONTROLMADS é corretamente denominado de DKT, Triângulo Discreto de Kirchoff (do inglês Discrete Kirchoff Triangule). Este possui três nós, com três graus de liberdade por nó, sendo duas rotações e um deslocamento vertical, totalizando-se nove graus de liberdade (Observe Figura 32);
- Os elementos de placa retangular utilizados são aqueles derivados da teoria de Reissner-Mindlin, que leva em consideração as deformações transversais devido ao cisalhamento. Possui por sua vez, quatro nós, sendo três graus de liberdade por nó, apresentado duas rotações e um deslocamento vertical, também, totalizando 12 graus de liberdade (Observe Figura 33).

**Figura 32** – Elemento de placa triangular com seus respectivos graus de liberdade.



Fonte: VASCONCELOS, 2003.

**Figura 33** – Elemento de placa retangular com seus respectivos graus de liberdade.

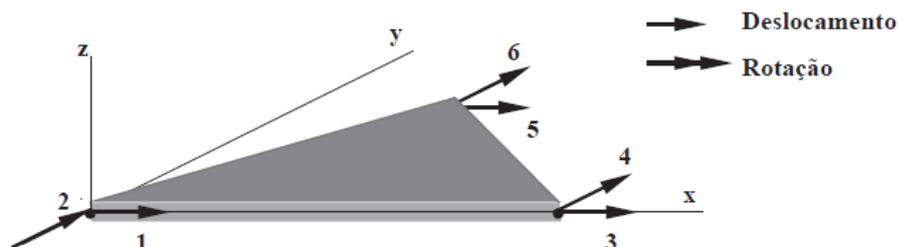


Fonte: VASCONCELOS, 2003.

### 5.3. ELEMENTO DE PLACA GENERALIZADO

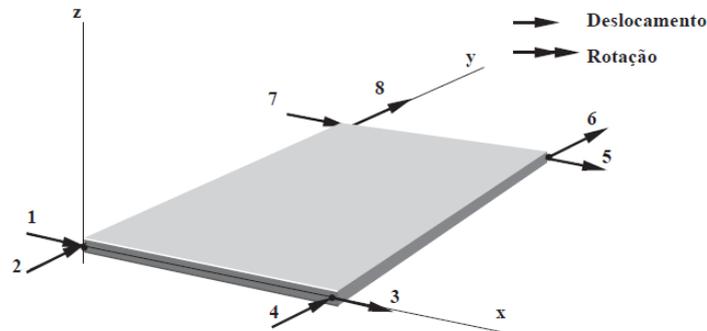
Para se obter um elemento de placa mais geral, considerando tanto o efeito de flexão quanto o resultado do estado plano de tensões, foi acoplado a este um elemento triangular de membrana composto por três nós, com dois graus de liberdade por nó, sendo estes dois deslocamentos, num total de seis graus de liberdade. E do mesmo modo que o elemento triangular de placa, no elemento retangular também foi acoplado um elemento de membrana, por sua vez, empregou-se um do tipo retangular, com graus seus respectivos graus de liberdade, conforme as Figuras 34 e 35 (VASCONCELOS, 2003).

**Figura 34** – Elemento de membrana triangular com seus respectivos graus de liberdade.



Fonte: VASCONCELOS, 2003.

**Figura 35** – Elemento de membrana retangular com seus respectivos graus de liberdade.



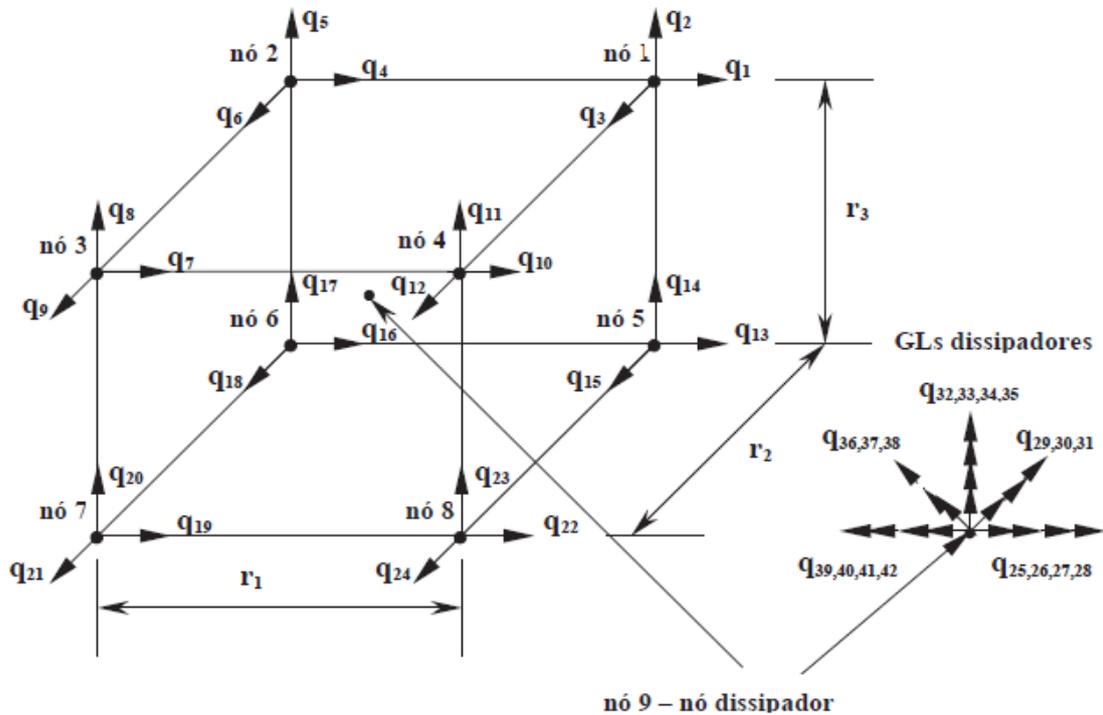
Fonte: VASCONCELOS, 2003.

#### 5.4. ELEMENTO HEXAÉDRICO

Neste elemento são considerados oito nós, em que existem vinte e quatro graus de liberdade com seis movimentos possíveis de corpo rígido (três translações e três rotações) e que a modelagem cria um grau de dissipação para cada elemento. São por eles representados os elementos viscoelásticos, e podem ser definidos como aqueles para os quais as propriedades são variáveis no domínio do tempo e da frequência.

De acordo com Vasconcelos (2003), denota-se que os graus de liberdade estão associados à incógnitas nodais físicas (deslocamentos, esforços internos, etc), devendo haver também a introdução de nós dissipadores, que não possuem coordenadas físicas, devendo estar associado ao elemento hexaédrico através de um nó fictício. A diferença de graus de liberdade entre o nó dissipador e os demais pode ser evidenciado na Figura 36.

**Figura 36** – Elemento hexaédrico linear com os nós e GLs dissipadores.



Fonte: VASCONCELOS, 2003.

Torna-se possível então a partir dessa biblioteca de elementos, modelar a partir das dimensões dos elementos discretizados, os componentes estruturais que se desejar para avaliação dos seus modos de vibração, deslocamentos, acelerações e outras coisas através da implementação via CONTROLMADS.

## 5.5. ELEMENTO DE CASCA

O CONTROLMADS não apresenta nenhuma formulação especial para o elemento de casca, são utilizados os mesmos preceitos do elemento de placa com efeito membrana, com a diferença da utilização da matriz de rotação para a montagem das matrizes globais da estrutura de rigidez, massa e amortecimento (DANTAS, 2017).

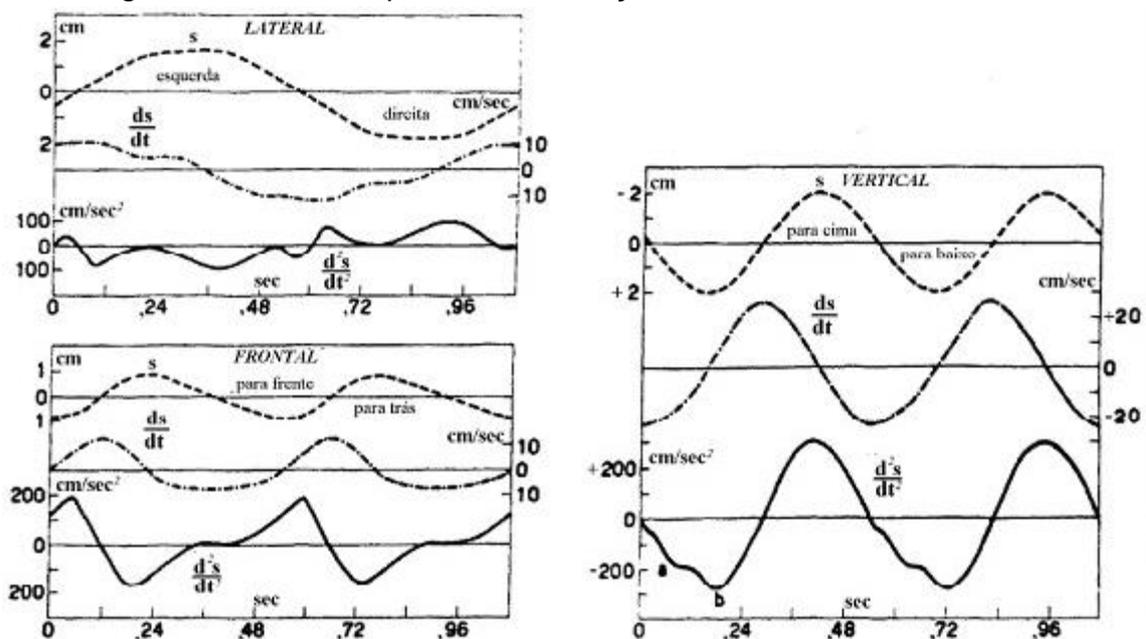
## 6. APLICAÇÃO DE MVE EM LAJES STEEL DECK

### 6.1. INFLUÊNCIA DO CAMINHAR EM TERMOS DE FREQUÊNCIAS DE EXCITAÇÃO

O simples ato de caminhar tornou-se alvo de vários estudos ao longo dos anos. Os egípcios, observavam a forma do andar visando repostas na medicina, de lesões devido o jeito de caminhar, há cerca de 3.800 anos. E com a criação de técnicas captadoras de imagens sequenciadas a descrição do caminhar pode ser bem entendida. Não sendo à toa, que até hoje a fotogrametria é muito utilizada para esta discretização (VARELA, 2004).

Pode ser referenciado por exemplo, o trabalho de Cavagna, Saibene e Margaria (1963, *apud* VARELA, 2004) que analisaram os movimentos através de resultados de ensaios experimentais utilizando acelerômetros fixados no tronco, próximo ao centro de gravidade corporal humana na posição vertical. Ocasinou-se através deste estudo, a observação das variações no tempo das amplitudes dos movimentos vertical, lateral e frontal (Ver Figura 37).

**Figura 37** – Deslocamentos, velocidades e acelerações temporais do centro de gravidade de uma pessoa nas direções lateral, frontal e vertical.

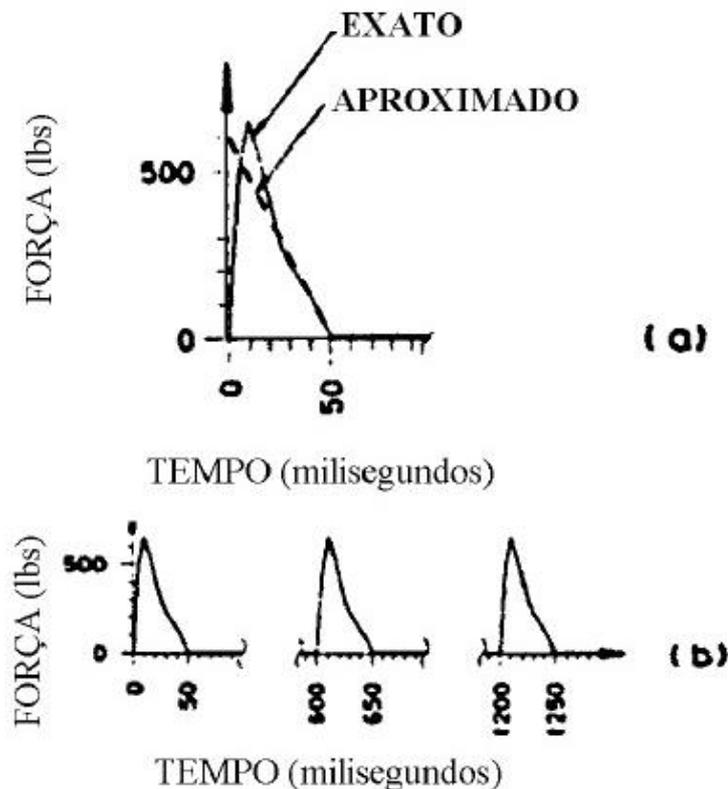


Fonte: CAVAGNA, SAIBENE & MARGARIA (1963)

Mas na realidade, o caminhar varia de pessoa para pessoa, depende da idade, do físico e fatores sociais que influenciem no jeito do ser humano. Um jovem, por exemplo apresenta um balanço vertical mais proeminente, com impactos de calcanhar mais intensos, solicitando mais a estrutura. O idoso por sua vez apresenta um caminhar suave, pendular (VARELA, 2004).

É evidente portanto que existem várias maneiras de se produzir as funções que determinar as cargas do caminhar. Segundo Varela (2004), uma delas é através da função matemática que expresse a variação da força produzida por uma pessoa ao longo do tempo. Cita-se Tolaymat que tentou representar o caminhar através de uma série de impactos. Observa-se que há uma medida aproximada e exata, que permite agradavelmente a utilização de impactos para representação do caminhar (Figura 38). Ressalta-se que neste trabalho foram impostas cargas de impactos ao longo do tempo e espaço para representação do caminhar.

**Figura 38** – Caminhar representado por uma série de impactos.

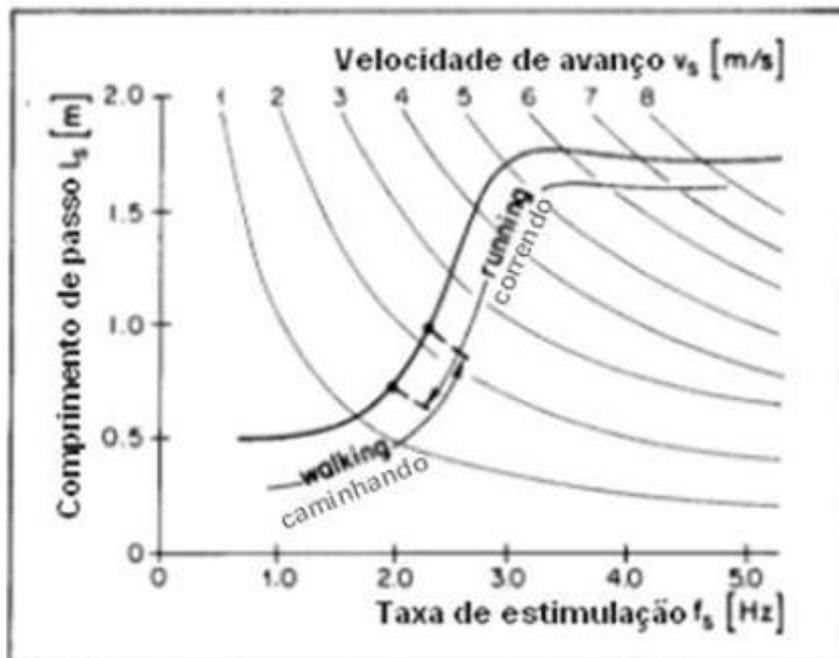


Fonte: VARELA, 2004.

Correr e andar dão ocasião a cargas dinâmicas relativamente consideráveis em estruturas para pedestres, exemplo: lajes, passarelas, passagens e conexões. Essas formas caracterizam-se pela frequência, velocidade de avanço e função de tempo de carregamento (BACHMANN & AMMANN, 1987).

A taxa de estimulação ( $f_s$ ) domina a carga dinâmica, é medida em pisadas por segundo, sendo mais adequado o uso em Hertz ( $Hz$ ). A velocidade de avanço ( $V_s$ ) é realizada com a frequência através do comprimento do passo ( $l_s$ ), naturalmente as pessoas podem possuir comprimentos de passos bastante diferentes para velocidade de avanço (BACHMANN & AMMANN, 1987). Vale visualizar a Figura 39.

**Figura 39** – Velocidade de avanço e comprimento de passo variantes durante o ato de caminhar e correr.



Fonte: BACHMANN & AMMANN (1987, *apud* DANTAS, 2017).

Sobre a possibilidade de correlacionar a frequência, velocidade de avanço e comprimento de passo, podemos considerar a Tabela 1.

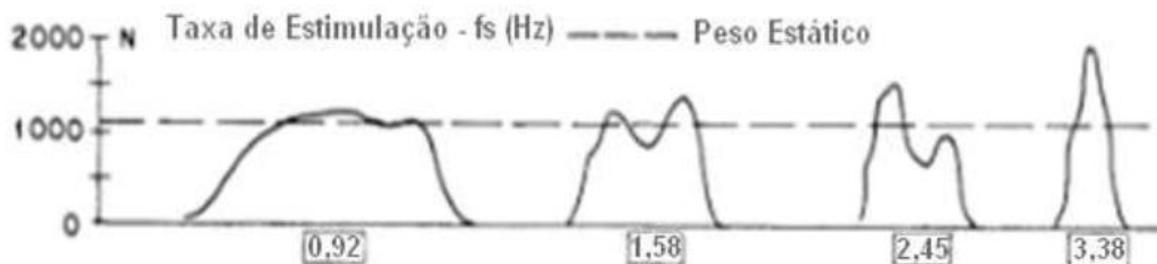
**Tabela 1** – Correlação entre frequência, velocidade de avanço e comprimento de passo.

	$f_s$ (Hz)	$V_s$ (m/s)	$l_s$ (m)
<b>Caminhada lenta</b>	~1,7	1,1	0,60
<b>Caminhada normal</b>	~2,0	1,5	0,75
<b>Caminhada rápida</b>	~2,3	2,2	1,00
<b>Corrida “lenta”</b>	~2,5	3,3	1,30
<b>Corrida rápida</b>	>3,2	5,5	1,75

Fonte: BACHMANN & AMMANN (1987, *apud* DANTAS, 2017).

Ao analisar a função de tempo de carregamento em uma estrutura, nota-se que existirão frequências naturais maiores à medida que ocorra um menor intervalo de tempo de contato de um corpo, como retratado na Figura 40.

**Figura 40** – Função de tempo de carregamento.



Fonte: BACHMANN & AMMANN (1987, *apud* DANTAS, 2017).

### 6.1.1. Consequência das vibrações em seres humanos

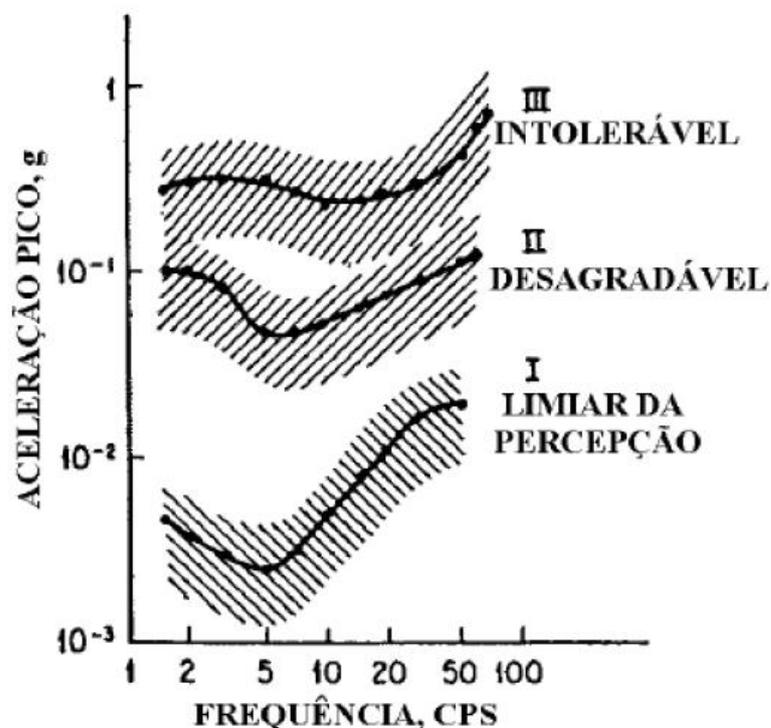
Segundo Varela (2004), a sensibilidade humana às vibrações é um tema muito complexo porque abrange tanto aspectos físicos quanto psicológicos. Uma sequência de fatores pode motivar a sensibilidade humana às vibrações. As posições (em pé, sentado, deitado), o sentido da espinha dorsal com referência à direção das vibrações, característica da atividade que a pessoa está desempenhando, sexo, idade, humor, hora do dia, ambiente, são exemplos desses fatores. Por outro lado, a intensidade do senso humano às oscilações é motivada pelos picos de

deslocamentos, velocidades e acelerações, frequência de vibração, amortecimento da estrutura, e tempo da exposição.

No início da década de 1930, Reiher e Meister (1931, *apud* Varela, 2004), desenvolveram escalas de percepção e aceitabilidade a vibrações contínuas baseadas na frequência e amplitude das vibrações. Tais escalas foram elaboradas com base em testes em laboratório, onde um grupo de pessoas em pé foi submetido a vibrações contínuas com frequências variando de 3 a 100 Hz e amplitudes entre 0,01 e 10 milímetros, registrando suas reações subjetivas.

No ano de 1948 Von Gierke e Goldman categorizaram a resposta subjetiva de pessoas a vibrações em limiar de percepção, do desconforto e da tolerância baseando-se na frequência e amplitude máxima de vibração. Tal critério foi representado na forma gráfica demonstrada na Figura 41, e é resultado da junção dos resultados experimentais com tempo de exposição às vibrações de 5 a 20 minutos. (VARELA, 2004).

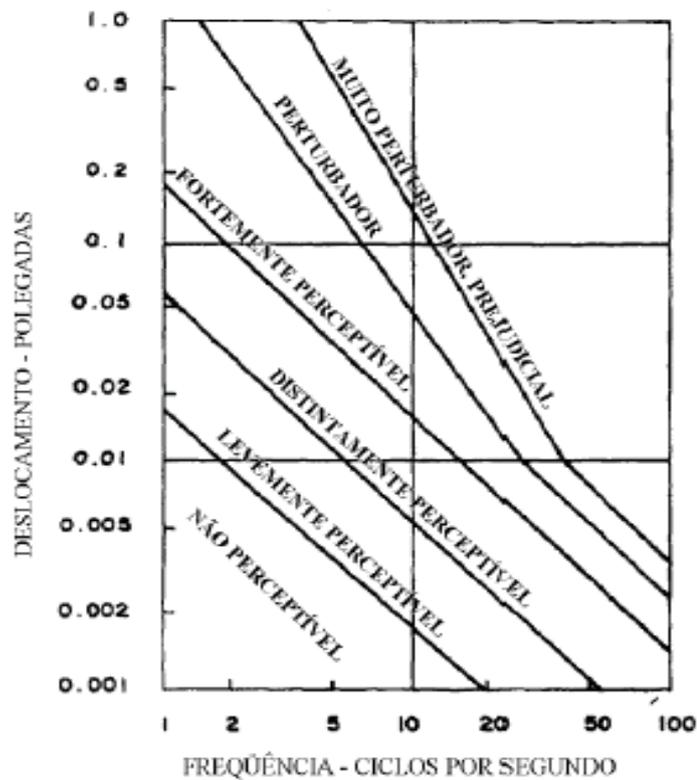
**Figura 41** – Acelerações pico médias em várias frequências em função da sensibilidade humana.



Fonte: VARELA, 2004.

Com base em um estudo que envolvia dois pisos em laboratório e 49 diferentes pisos de edifícios, Lenzen determinou que a massa e o amortecimento são fatores essenciais na prevenção de vibrações intoleráveis nas estruturas de piso, o que não serve para rigidez. Criou-se então, um critério de projeto baseado na escala representada na Figura 42 (LENZEN, 1966 *apud* VARELA, 2004).

**Figura 42** – Sensibilidade humana às vibrações



Fonte: LENZEN, 1966 *apud* VARELA, 2004.

E de acordo com Bachmann (1995), a partir do instante em que a frequência de vibração encontra-se entre 1 Hz e 10 Hz, a percepção desta é proporcional à aceleração e quando se encontrar entre 10 Hz e 100 Hz, será proporcional a velocidade. A Tabela 2 proporciona claramente uma correlação sobre estes parâmetros, através da exposição dos limites de percepção humana para vibrações harmônicas verticais, sendo a aceleração medida em  $mm/s^2$  e a frequência em Hz. Os resultados desta tabela são compilações originadas de vários autores.

**Tabela 2** – Limites de percepção humana às vibrações verticais (pessoa em pé).

Descrição	Frequência de 1 a 10 Hz. Aceleração máxima (mm/s <sup>2</sup> )	Frequência de 10 a 100 Hz. Aceleração máxima (mm/s <sup>2</sup> )
Pouco perceptível	34	0,5
Claramente Perceptível	100	1,3
Desagradável	550	6,8
Intolerável	1800	13,8

Fonte: BACHMANN, 1995 *apud* DANTAS, 2017.

### 6.1.2. Problemas ocasionados em estruturas devido a vibrações

As pontes pedonais em concreto, comparativamente às metálicas, são menos susceptíveis a problemas de vibrações excessivas. As pontes pedonais constituídas por aço, apesar de ser um material com peso específico superior ao da pedra ou concreto, globalmente são estruturas mais “leves” e flexíveis permitindo aos projetistas uma maior liberdade ao nível estético e arquitetônico.

Muitos problemas estruturais oriundos de efeitos dinâmicos são mundialmente conhecidos. Podem ser impulsionado por carregamentos humanos, ações naturais e em alguns casos podem chegar ao colapso. Temos como exemplo a Figura 43, em referência a Millenium Footbrigdge, localizada em Londres (Reino Unido), no dia da sua inauguração, na cerimônia de abertura, o caminhar da multidão de mais de 1000 pessoas juntamente com uma banda, fez com que a estrutura entrasse em ressonância. Podendo ser observadas frequências de vibração em torno de 0,8 Hz a 1 Hz (COSTA, 2012).

**Figura 43** – Millenium Bridge no dia da inauguração.



Fonte: COSTA, 2012

Segundo Costa (2012), devido ao excessivo movimento lateral horizontal e torsional da estrutura as pessoas que a percorriam, numa tentativa de manterem o equilíbrio, sincronizaram os seus movimentos com os da ponte, esta sincronização provocou uma amplificação das vibrações e conseqüente instabilidade dinâmica. Com o aumento das oscilações gerou-se algum incomodo e insegurança na multidão.

## 7. MODELO COMPUTACIONAL DA ESTRUTURA COM LAJE *STEEL DECK*

O modelo pode ser concebido como corpo rígido ou corpo deformável. Para aquele que é rígido, os elementos infinitesimais possuem posições fixas entre si, não sofrendo mudanças em suas dimensões após aplicação de uma determinada força. Quando as posições relativas são modificadas com base nas propriedades de um corpo e das ações externas, de forma que seja possível a utilização do cálculo infinitesimal iniciado por Sir Isaac Newton e Gottfried Wilhelm von Leibniz, temos um corpo deformável.

Um modelo contínuo tem configuração especificada por uma ou mais funções das coordenadas espaciais e do tempo. Distribui-se de forma homogênea ao longo do modelo, a rigidez e a massa. Um modelo discreto é uma idealização em que a configuração geométrica é especificada por um número finito de parâmetros cinematicamente independentes entre si (SORIANO, 2014, p. 10). Esses parâmetros são os graus de liberdade. Conseqüentemente a massa, a rigidez e as forças atuantes são considerados discretamente.

Sobre a discretização de um modelo não se aconselha um refinamento demasiadamente aprimorado, pois o modelo contínuo já retém aproximações com base no sistema físico original, além de que aprimorar demanda mais geração de modelos discretos e conseqüentemente aumenta o tempo necessário para o processamento automático, ou seja dispêndio de tempo. Mas de certa forma, é importante ter em mente que quanto mais discreta for uma análise, mais próximas da realidade estarão as respostas.

Para analisar um problema de cunho dinâmico é necessário além do conhecimento que envolve a análise estática estrutural, ter um bom entendimento do movimento de sistemas mecânicos simples (como o sistema massa-mola) e utilização dos conceitos básicos embutidos na formulação das leis da mecânica clássica. (BATTISTA, 2001)

Esquematisa-se a elaboração do trabalho de análise estrutural na dinâmica de acordo com a Figura 44.

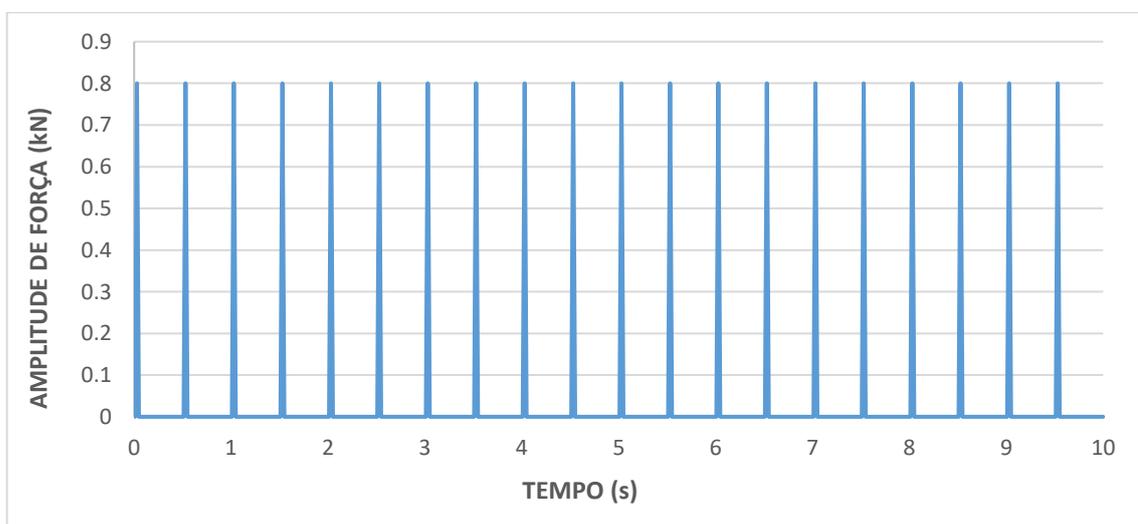
**Figura 44** – Esquema da análise de um modelo de estrutura de multigráus de liberdade.



Fonte: DANTAS, 2017.

Analisou-se as atenuações de amplitudes de vibrações em lajes de método construtivo *steel deck*. Inicialmente, foram obtidas as frequências naturais de cada sistema estrutural, sem a aplicação do material viscoelástico e conseguinte com a aplicação deste material. Além disso, verificou-se as amplitudes de deslocamento e aceleração com base em duas formas de carregamento para simulação do caminhar. Na primeira situação ocorre a simulação do caminhar de apenas uma pessoa de  $80\text{ kg}$  ( $0,8\text{ kN}$ ), percorrendo toda extensão da laje pelo meio do vão, a uma velocidade de  $1,6\text{ m/s}$  e comprimento de passo de  $80\text{ cm}$ , representando uma sequência de impactos; a outra situação dá-se pelo caminhar de três pessoas, com os mesmos parâmetros de velocidade e carga, percorrendo por sua vez, paralela e sincronamente, toda a extensão longitudinal da laje em *steel deck*. Ambas situações são representadas na Figura 45.

**Figura 45** – Representação de impactos sequenciais na laje.

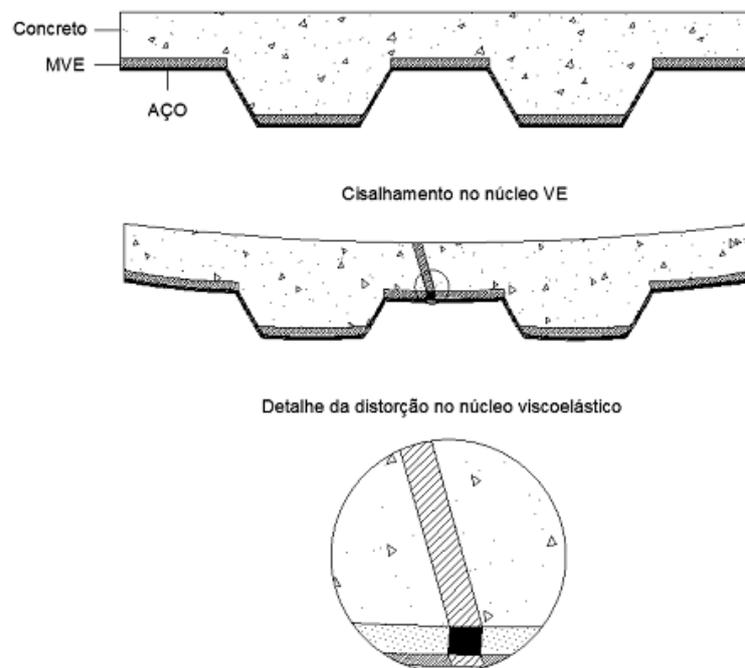


Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Ressalta-se que para as velocidades  $1,4\text{ m/s}$  e  $1,8\text{ m/s}$  do caminhar, os tempos de percorrer toda a laje se alteram, respectivamente, para  $11,42\text{ s}$  e  $8,88\text{ s}$ .

A configuração do sistema estrutural da Figura 46, consiste em uma forma alternativa para aplicação de MVE, idealizada especialmente neste trabalho. Neste caso, possui leve similaridade ao modelo sanduíche, porém a camada inferior apresenta espessura fina de aço e o modelo é compreendido em ondas baixas e altas. Acarretando em deformações extensionais quanto deformações cisalhantes em planos paralelos as interfaces baixas e altas, sendo a maior parte do amortecimento dado pelo cisalhamento.

**Figura 46** – Esquema do modelo estrutural com aplicação de MVE nas interfaces altas e baixas.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

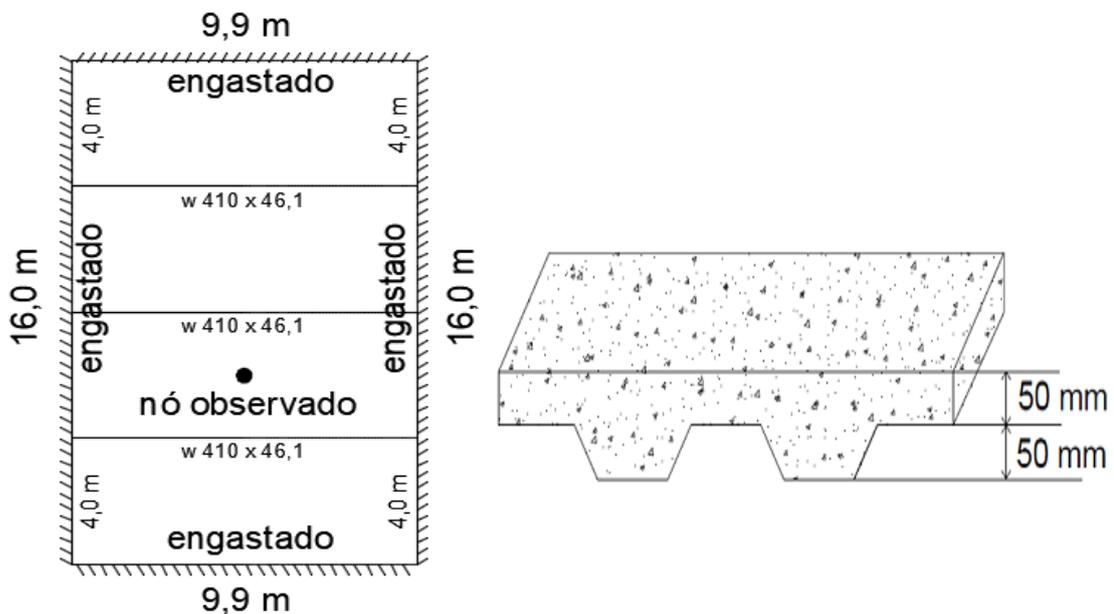
A discretização do modelo em laje *steel deck* sem MVE contempla um pavimento com dimensões de  $9,90\text{ m}$  de largura e  $16,0\text{ m}$  de comprimento, compreendido por quatro lajes com área  $9,90\text{ m} \times 4,0\text{ m}$ . Estas são engastadas nas extremidades pelas vigas principais com perfil  $W\ 610 \times 113$ , consideradas rígidas e indeslocáveis em todo o bordo por meio de restrições nodais. No interior da estrutura, as lajes são apoiadas por vigas secundárias de perfil  $W\ 410 \times 46,1$ . A laje *steel deck* apresenta uma fôrma de espessura  $1,25\text{ mm}$ , e é caracterizada por possuir seção

transversal de aço sob concreto com cotas alternadas. Ora possui 50 mm da superfície até a onda mais próxima da mesma, ora possui 100 mm da superfície até a onda mais baixa do *deck*, alternando sucessivamente por todo sentido transversal da laje, como demonstrado na Figura 47.

A resistência à compressão do concreto utilizado para análise nas lajes foi de 25 MPa, com módulo de elasticidade 26 GPa.

Para aplicação do MVE, implementaram-se dois modelos, a saber: o primeiro sem o uso de conectores *stud bolts*; e o segundo com sua utilização.

**Figura 47** – Geometria e condições de contorno da laje estudada.



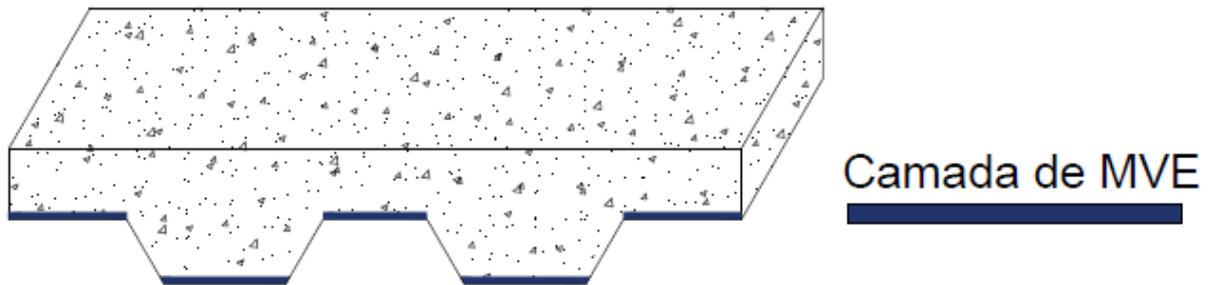
Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Para a tentativa de redução das amplitudes dos deslocamentos e das acelerações na estrutura, implementou-se ao sistema, o material viscoelástico com espessura de 5 mm, sendo este material disposto entre a fôrma e o concreto (Figura 48). A mesma apuração de dados que foi realizada para o modelo sem MVE, foi realizada para o modelo com material viscoelástico para que fosse plausível uma equiparação de resultados entre eles.

Faz jus salientar, que o material viscoelástico usado nesta pesquisa, foi o mesmo utilizado por Vasconcelos (2003) e Santos (2007). Material este, objeto de

investigação teórico-experimental com resultados relevantes para sua aplicação na ponte Rio-Niterói.

**Figura 48** – Aplicação do material viscoelástico em configuração sanduíche em laje *steel deck*.

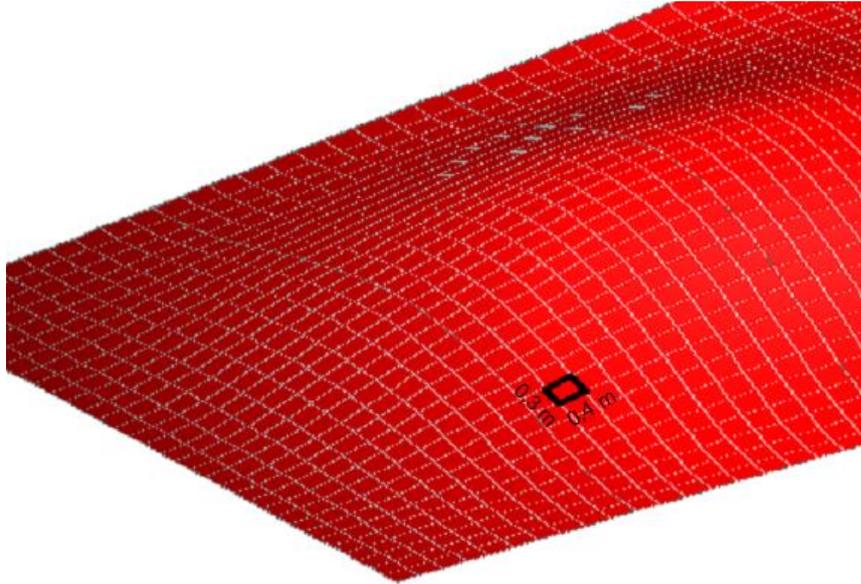


Fonte: Acervo dos autores, 2018.

As lajes *steel deck* para os modelos com e sem material viscoelástico, foram modeladas com o auxílio do método dos elementos finitos. Sendo o modelo discretizado por elementos de placa quando representada a laje: pórtico, quando retratadas as vigas principais e secundárias; e por último, não menos importante, os hexaédricos, que correspondem a camada de material viscoelástico. Sendo cada elemento finito de placa modelado com as dimensões  $0,3\text{ m} \times 0,4\text{ m}$  como demonstrado na Figura 49. Vale ressaltar que as dimensões dos elementos quadrilaterais seguiu o formato das cavas da forma; com efeito nas espessuras de cada elemento. Esses dados em totalidade, foram inseridos no CONTROLMADS, denotando as frequências naturais, amplitude de deslocamento e aceleração das lajes do sistema estrutural.

Quanto as propriedades físicas do material viscoelástico utilizado pode-se afirmar que foi adotado um peso específico ( $\gamma$ ) de  $13,4\text{ kN/m}^3$  e um módulo de deformação ( $\varepsilon$ ) de  $2,8\text{ MPa}$ .

**Figura 49** – Demonstração das dimensões de cada elemento finito de placa.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

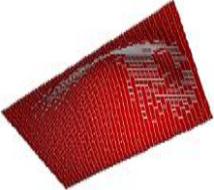
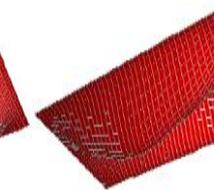
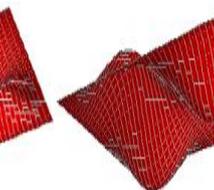
## 7.1. VERIFICAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS DAS LAJES

Observou-se os cinco primeiros modos de vibração e percebeu-se uma ligeira redução das frequências naturais nas lajes com o material viscoelástico, em virtude do aumento de massa ao sistema e redução da rigidez da ligação. É imprescindível frisar que as frequências da estrutura original e da estrutura com MVE exibe valores próximos, o que assegura que as características dinâmicas da estrutura sejam mantidas, destacando a indubitabilidade do material viscoelástico na incumbência de atenuar vibrações.

### 7.1.1. Modelo estrutural tipo 1 – Sem *stud bolt*

O Quadro 1 demonstra a ilustração de cada modo de vibração para as estruturas originais e com MVE e suas respectivas frequências medidas em *Hz*. Verificou-se uma diminuição em cerca de 5% nas frequências naturais quando implementado o material viscoelástico, sendo um resultado convincente, aparentando uma leve diferença, alterando moderadamente as características dinâmicas da estrutura.

**Quadro 1** – Freqüências naturais e modos de vibração do modelo estrutural sem *stud bolt*.

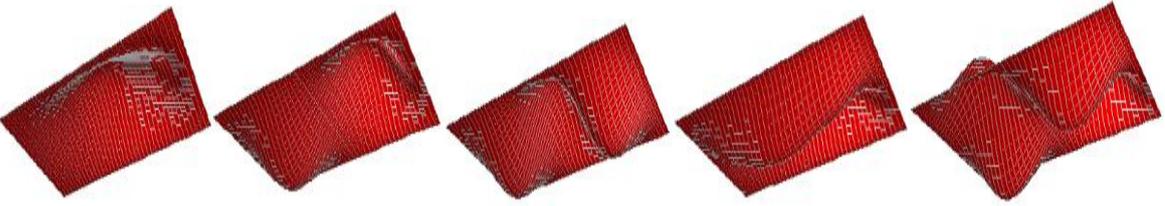
Modos da laje em <i>steel deck</i> com bordos engastados e sem <i>stud bolt</i> .				
				
Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Freqüências naturais da estrutura sem MVE (Hz)				
3,60	5,37	7,92	8,72	10,39
Freqüências naturais da estrutura com MVE (Hz)				
3,43	5,00	7,72	8,59	10,01

Fonte: Acervo dos autores, 2018.

### 7.1.2. Modelo estrutural tipo 2 – Com *stud bolt*

O Quadro 2 também mostra resultados satisfatórios, obtendo uma redução de apenas 1% de frequência natural. O que expõe uma pequena mudança nas características dinâmicas da estrutura. Tal diferença reside na pouca rigidez da forma metálica, que se deforma juntamente com o material.

**Quadro 2** – Freqüências naturais e modos de vibração do modelo estrutural com *stud bolt*.

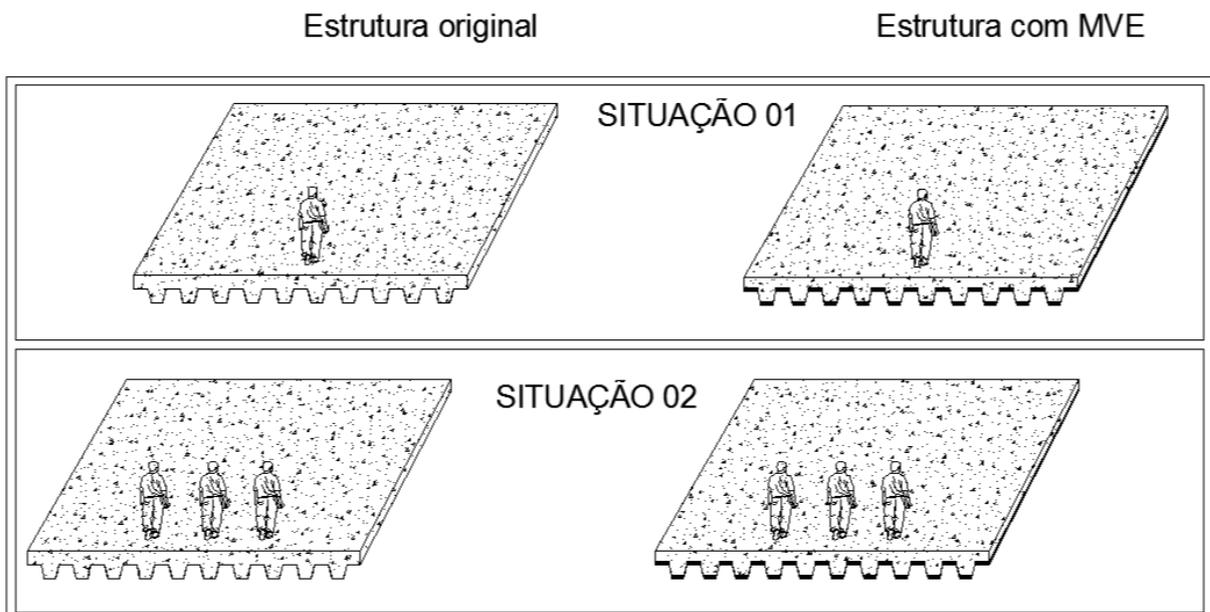
Modos da laje em <i>steel deck</i> com bordos engastados e com <i>stud bolt</i> .				
				
Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4	Modo 5
Freqüências naturais da estrutura sem MVE (Hz)				
3,60	5,37	7,92	8,72	10,39
Freqüências naturais da estrutura com MVE (Hz)				
3,58	5,32	7,89	8,70	10,31

Fonte: Acervo dos autores, 2018.

## 8. ANÁLISE DAS RESPOSTAS DINÂMICAS SOB AÇÃO DO CAMINHAR HUMANO EM LAJES *STEEL DECK*

As amplitudes de deslocamento e aceleração para o sistema estrutural sem e com material viscoelástico, foram determinadas por meio de análise numérico – computacional. Para idealização, realizou-se uma divisão em duas situações distintas, a saber: a primeira situação, que compreende o caminhar de uma única pessoa ao longo da laje, em sentido longitudinal; e a segunda, o caminhar de três pessoas, observando a tendência do aumento da excitação, devido ao acréscimo de cargas (ver a Figura 50). Todas essas simulações foram realizadas para uma mesma velocidade de caminhar.

**Figura 50** – Simulações nas lajes originais e com material viscoelástico.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

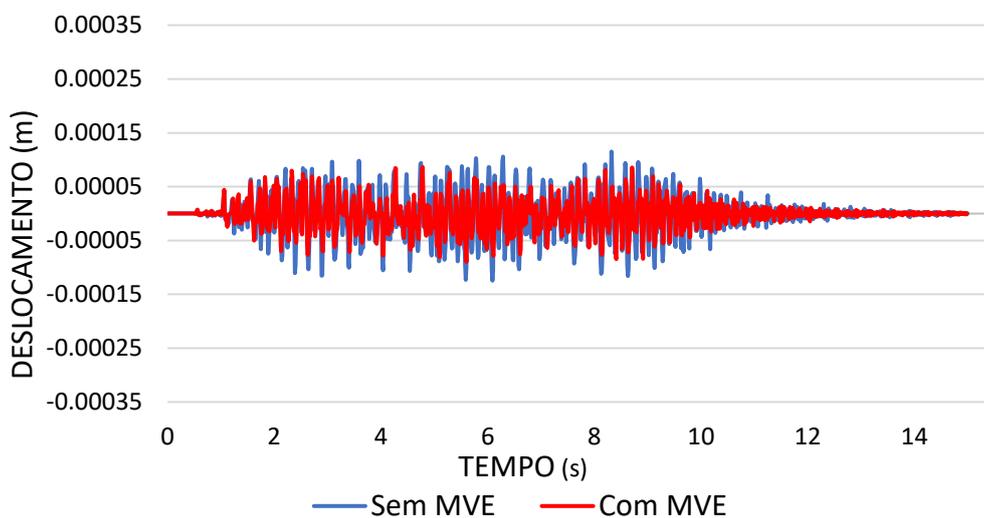
O que ocorre usualmente é que os primeiros modos de vibração (baixas frequências) mobilizem a estrutura de forma global, e à medida que se utilizam modos posteriores aos iniciais, tenda a captar modos de vibrações localizados em determinados elementos do modelo implantado. Considerando que as vigas estejam flexíveis, participando diretamente nos primeiros modos de vibração analisados pelo CONTROLMADS, foi necessário propor uma análise gráfica (tempo  $\times$  deslocamento)

relativa, criada a partir da observação dos deslocamentos no centro de uma das lajes e também no centro de uma das vigas secundárias, tornando possível a análise relativa em que se sobressai apenas os deslocamentos da laje. Destaca-se, que o objetivo de agregar a este trabalho os gráficos de deslocamento relativo é avaliar a redução de vibração somente na laje, uma vez que o MVE é mais efetivo na superfície do modelo.

### 8.1. LAJE TIPO 01 – SEM *STUD BOLT*

A Figura 51, refere-se a passagem de uma pessoa no sentido longitudinal da laje. A laje modelada por sua vez encontra-se sem uso de *stud bolt*, pois foi um parâmetro adotado inicialmente para obtenção dos resultados. Nota-se que o material viscoelástico comportou-se com melhor eficiência entre os instantes de 2 a 11 segundos do caminhar, aproximadamente, onde se observou uma redução média de 43%.

**Figura 51** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1.

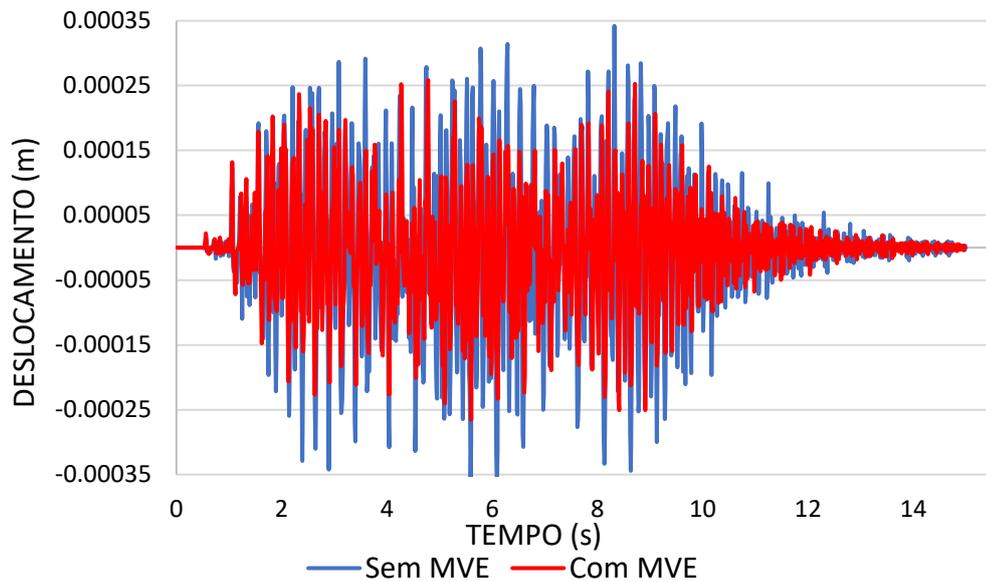


Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Já a figura 52, refere-se a passagem de três pessoas no sentido longitudinal da laje. A laje modelada encontra-se também sem uso de *stud bolt*. Nota-se que o material viscoelástico comportou-se com melhor eficiência entre os instantes

de 2 e 11 segundos do caminhar, semelhantemente ao caminhar de 1 pessoa. Com a implementação do material viscoelástico verificou-se uma redução em cerca de 40%. Pode-se verificar, ainda, um aumento das amplitudes de oscilação, em virtude do aumento da quantidade de pessoas. O conseqüente aumento de energia infere maiores distorções, favoráveis ao uso do material viscoelástico.

**Figura 52** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 3 pessoas na laje tipo 1.

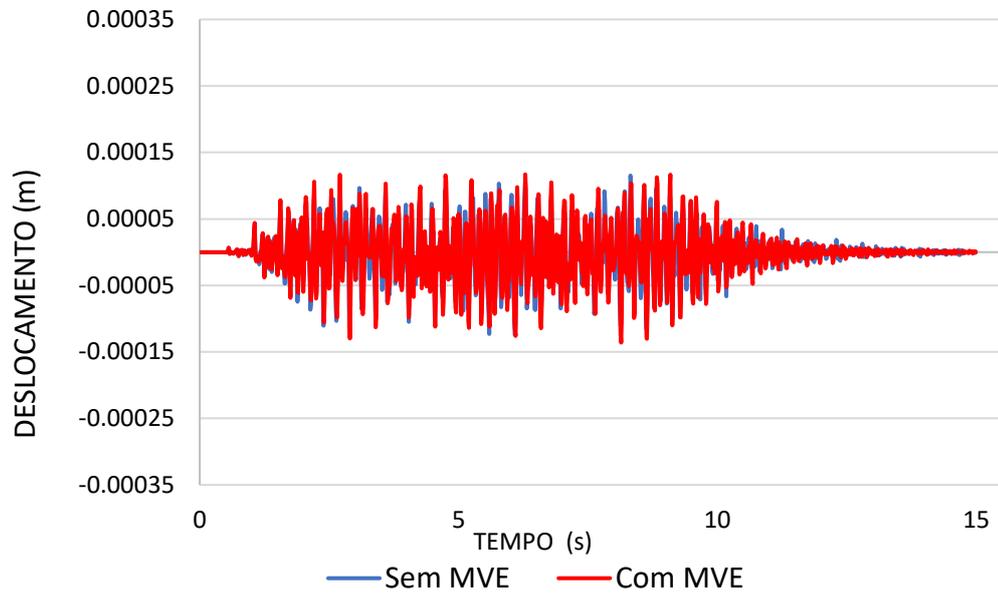


Fonte: Acervo dos autores, 2018.

## 8.2. LAJE TIPO 02 – COM STUD BOLT

A Figura 53, refere-se à resposta dinâmica em termos de deslocamento concernente à passagem de uma pessoa no sentido longitudinal da laje. Nota-se que o material viscoelástico comportou-se com muito pouca eficiência, apresentando redução cerca de 14%.

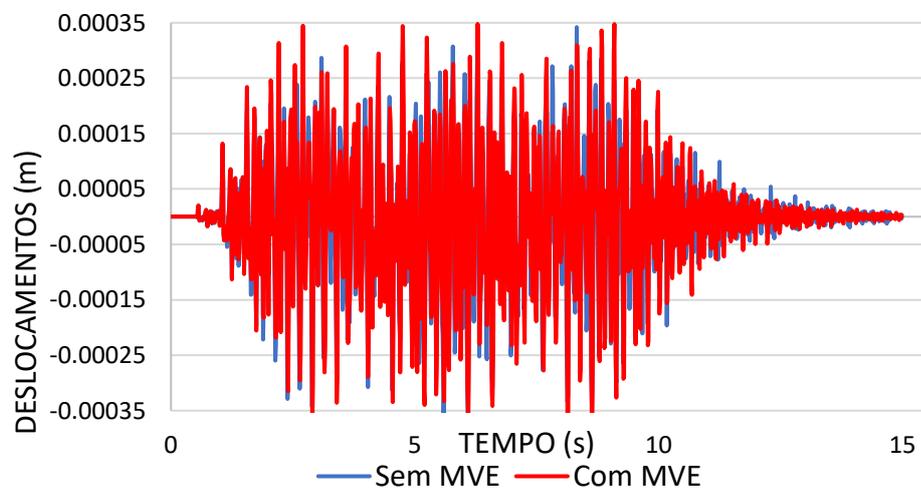
**Figura 53** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

A Figura 54, por sua vez, idealiza a passagem de três pessoas no sentido longitudinal da laje. A laje modelada encontra-se com uso de *stud bolt*, que retrata também a laje de tipo 2. Nota-se que o material viscoelástico comportou-se de forma semelhante à análise com uma pessoa.

**Figura 54** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

A primeira comparação levantada é que sem a incrementação dos conectores *stud bolts*, há maior deslocamento relativo entre o concreto e a forma metálica. Entende-se portanto, que ao implantar *stud bolts*, tal deslocamento relativo torna-se mais restringido, fazendo com que este modelo se aproxime em termos de restrição e comportamento modal da *steel deck* modelada sem uso de MVE. Ressalta-se, que o modelo sem MVE possui conectividade dos nós entre o concreto e aço, associadamente semelhante a restrição proporcionada pelos conectores, fazendo com que os modos de vibração dos modelos, sem uso de material viscoelástico e com a implementação de *stud bolt*, assemelhem-se.

A partir disto, evidencia-se a necessidade do estudo para verificação da aderência entre concreto e aço promovida pelo próprio material viscoelástico, indicando esta condição, como parâmetro para dimensionamento na engenharia estrutural.

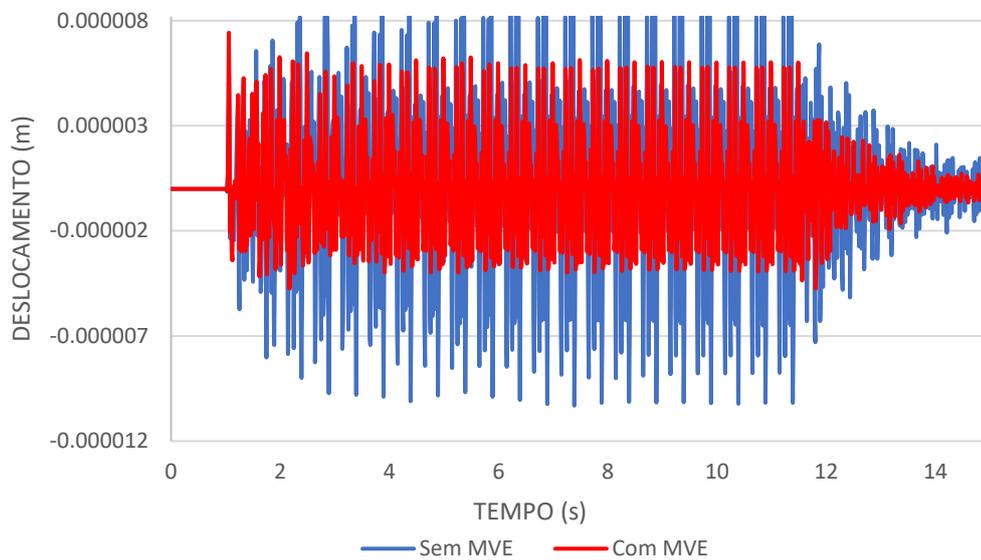
### **8.3. INFLUÊNCIA DE DIFERENTES VELOCIDADES NO MODELO ESTRUTURAL**

Após análise dos resultados para o deslocamento relativo nas lajes submetidas ao caminhar de uma ou três pessoas a uma velocidade de  $1,6 \text{ m/s}$ , outras velocidades de caminhar foram utilizadas, verificando as amplitudes da estrutura e a excelência do material viscoelástico.

Como visto no tópico anterior, não é interessante em termos de restrição entre aço e concreto, verificar diferentes velocidades em modelos com *stud bolt*. A partir disto, segue-se este trabalho em face de análises apenas sobre a modelagem sem os conectores, permitindo o êxito na análise da influência de diferentes velocidades de caminhar.

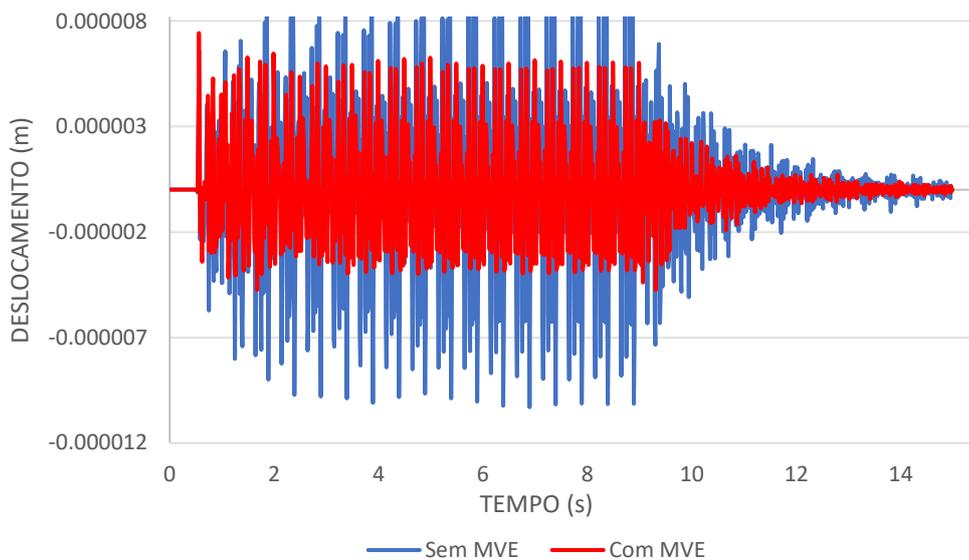
As Figuras 55 e 56, referem-se às respostas dinâmicas em termos de deslocamento obtidas através da passagem de uma pessoa no sentido longitudinal da laje. A laje modelada por sua vez encontra-se sem uso de *stud bolt*, que retrata a laje de tipo 1, a saber: a Figura 55 consiste no caminhar a uma velocidade de  $1,4 \text{ m/s}$ ; a Figura 56 no caminhar a uma velocidade de  $1,8 \text{ m/s}$ . Nota-se que o material viscoelástico comportou-se com eficácia, verificou-se aproximadamente 52% de redução para Figura 55 e 48% para Figura 56.

**Figura 55** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1 à uma velocidade de 1,4 m/s.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 56** – Resposta dinâmica em termos de deslocamento vertical relativo para observação de amplitude na laje do caminhar de 1 pessoa na laje tipo 1 à uma velocidade de 1,8 m/s.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

Comparando os gráficos dos deslocamentos ao longo do tempo, averiguou-se que para a velocidade de  $1,4 \text{ m/s}$  gerou uma maior amplitude através do caminhar quando a pessoa passa pelo último tramo de laje em relação ao caminhar de  $1,8 \text{ m/s}$ . Além disso, a frequência dos passos a velocidade mais baixa pode estar mais próxima de uma das frequências naturais da estrutura. Vale ressaltar que o ponto observado é o meio do vão de uma das lajes centrais como demonstrado na figura 47 anteriormente.

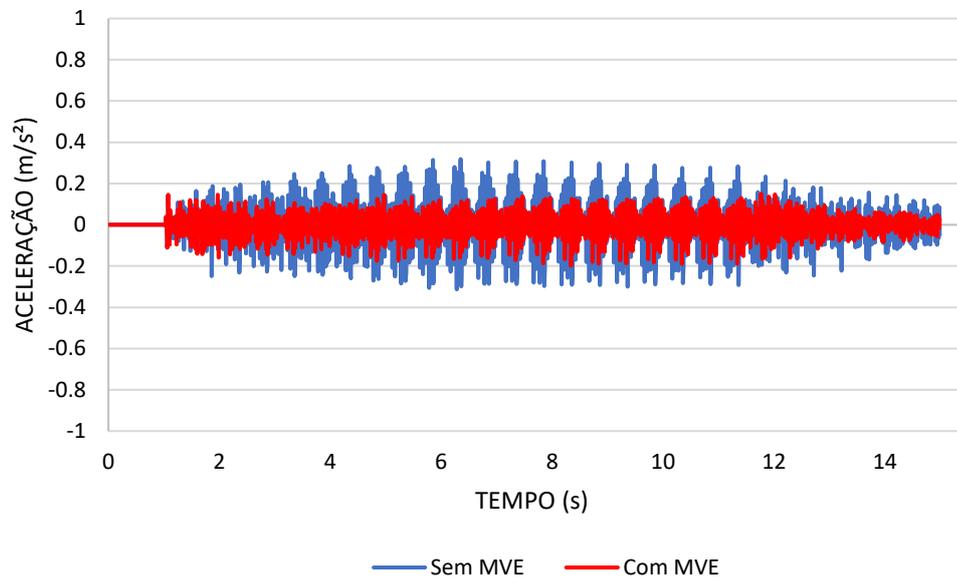
#### **8.4. VERIFICAÇÃO DAS ACELERAÇÕES NA ESTRUTURA DEVIDO A EXCITAÇÃO OCACIONADA PELO CAMINHAR**

Semelhantemente as figuras que apresentam as respostas dinâmicas em termos de deslocamento, podemos relacionar também através dos resultados que podem ser gerados no CONTROLMADS, gráficos de aceleração  $x$  tempo, que nos permite analisar sob o ponto de vista da análise sensorial.

Esse histórico de respostas no tempo, principalmente em termos de aceleração, é a grandeza utilizada na avaliação dos níveis aceitáveis de vibração sob enfoque do conforto dos usuários de uma certa edificação.

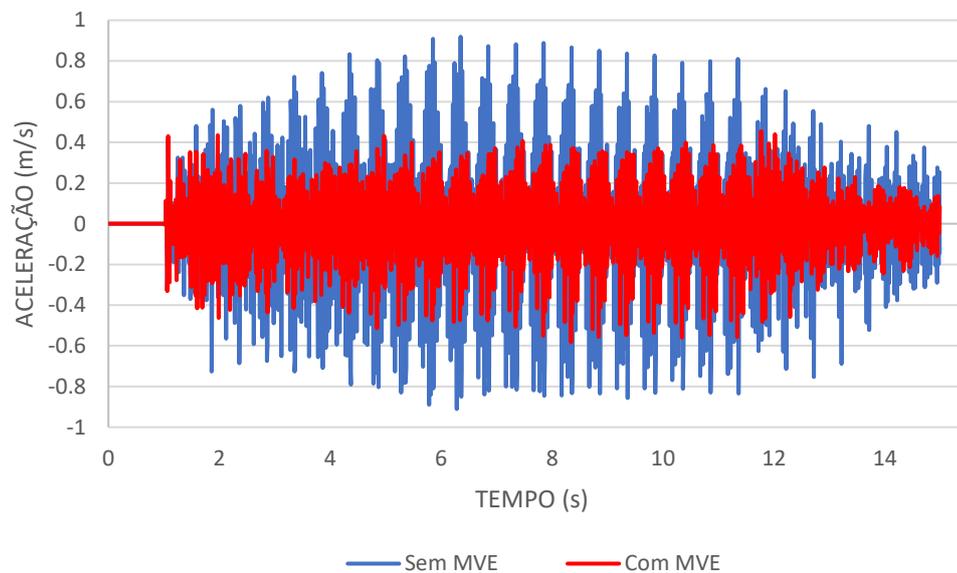
Na Figura 57, as acelerações chegam até por volta de  $0,3 \text{ m/s}^2$ . Nota-se uma redução significativa durante quase todo o caminho percorrido, sendo mais eficiente entre 1 a 11 segundos do caminhar, provando a efetividade do uso de material viscoelástico. Ao passar pela estrutura, não mais uma pessoa, mas sim três pessoas (Figura 58), observa-se que o comportamento das amplitudes é muito semelhante, porém o que altera nestes, é o aumento das amplitudes, chegando a por volta de  $1,0 \text{ m/s}^2$ . Havendo uma redução para Figura 57 de 62%, e para Figura 58 de 66%.

**Figura 57** – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2 para velocidade 1,4 m/s.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

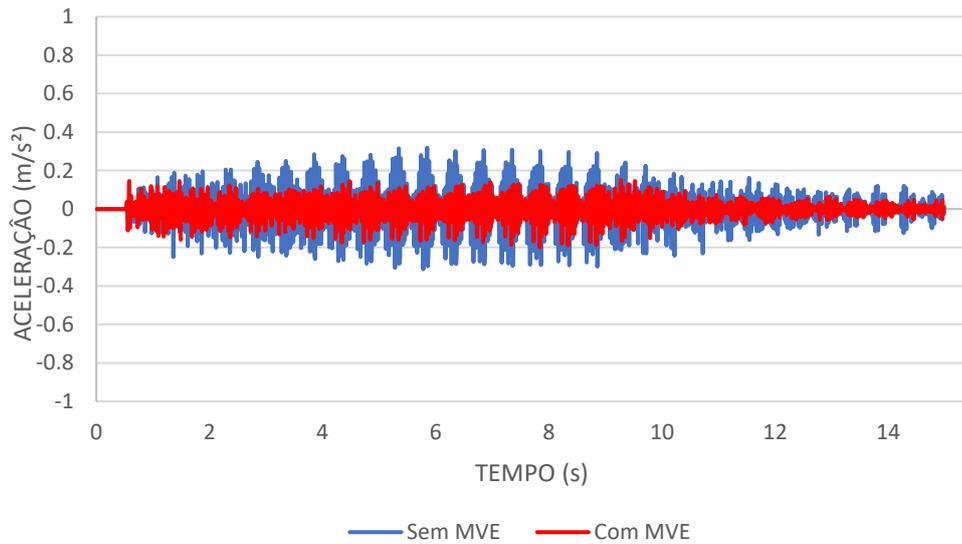
**Figura 58** – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2 para velocidade 1,4 m/s.



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

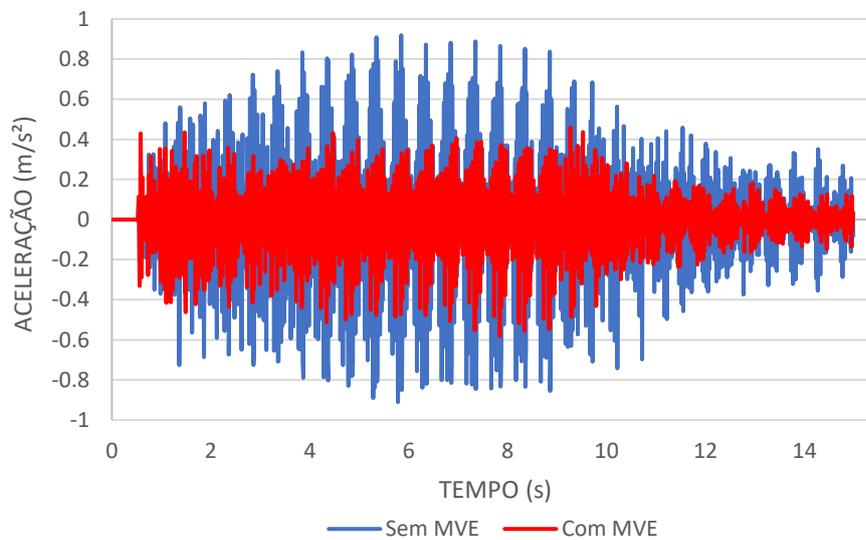
Já ao analisar outra velocidade, desta vez  $v = 1,8 \text{ m/s}$ , notoriamente resultou na não alteração nos valores, amplitudes e magnitudes que estes, em outras ocasiões poderiam ser alterados, como demonstrado nas Figuras 59 e 60.

**Figura 59** – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 1 pessoa na laje tipo 2 para velocidade  $1,8 \text{ m/s}$ .



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

**Figura 60** – Resposta dinâmica em termos de aceleração relativa com o caminhar de 3 pessoas na laje tipo 2 para velocidade  $1,8 \text{ m/s}$ .



Fonte: Acervo dos autores, 2018.

## 9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O tema desta pesquisa é recente na engenharia estrutural e merece atenções voltadas para si. Entende-se que análise dinâmica de vibrações é algo que há certo tempo vem preocupando o entendimento sobre as estruturas. Logo, propostas que apresentam tendências a solucionar estas colocações são bem vindas.

Ressalta-se que as verificações foram realizadas com auxílio da ferramenta numérico-computacional CONTROLMADS – Controle de Vibrações via Múltiplos Atenuadores Dinâmicos Sincronizados (SANTOS, 2007).

A princípio, é necessário ter dois cuidados iniciais. O primeiro consiste na discretização do modelo o qual se destina o estudo, onde deve haver um balanceamento entre a acurácia na discretização e o dispêndio de tempo que é causado por tal situação. Ao implementar espessuras variadas de elementos quadrilaterais, facilitou-se a aplicação do espécime, sendo esta adotado para toda a pesquisa. O segundo cuidado compreende na cautela ao comparar as frequências naturais, de maneira que seja garantida a proximidade característica do sistema estrutural com e sem MVE, e, conseqüentemente, a satisfatória atuação do material viscoelástico.

Outro ponto considerado neste trabalho foi o uso de conectores *stud bolts*. Sua utilização restringiu o deslocamento relativo entre concreto e forma da laje, reduzindo a efetividade do material viscoelástico.

Para simular o caminhar, a aplicação da função de impactos é indicada, devido a simplicidade e coerência confirmada por trabalhos acadêmicos já desenvolvidos anteriormente.

Testes de velocidades diferentes geram comportamentos em termos de deslocamentos diferenciados, sendo também, importantes verificações a serem feitas.

A redução de vibração com uso de MVE foi satisfatória, devendo-se ainda ter atenção quanto a disposição do material viscoelástico na telha forma para garantir aderência corretamente. Além disso, as condições e ambientes favoráveis, com definição de espessura ideal devem ser mensurados, visando o bom desempenho do MVE.

Ao comparar as reduções nos gráficos de aceleração e de deslocamento verifica-se que a aceleração apresentou percentual de redução maior que o

deslocamento, devido ao comportamento não linear. Vale salientar, que a sensibilidade é a mesma.

### **9.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS**

Outras pesquisas podem ser desenvolvidas quanto à redução e controle de estruturas de forma que seja testada a implementação do MVE. Instiga-se a pensar não somente em outras situações de modelo, ou seja, outros tipos de edificações ou até mesmo novas representações de elementos, visando uma melhor aproximação. Mas também incentiva-se o aumento da performance desta pesquisa, da seguinte forma:

- Verificação da ligação concreto-MVE-viga, no dimensionamento deste último elemento;
- Estudo da rigidez das vigas primárias;
- Refinamento da função do caminhar proposta;
- Verificação da aderência entre concreto e aço através da promoção do material viscoelástico, como parâmetro para dimensionamento na engenharia estrutural;
- Análise experimental para correlação teórico-experimental.

## REFERÊNCIAS

BACHMANN, Hugo; AMMANN, Walter. **Vibrations in Structures**. 3.ed. Switzerland: IABSE-AIPC-IVBH, 1987.

BACHMANN, Hugo. **Vibration Problems in Structures: Practical Guidelines**. 1.ed. Institut für Baustatik und Konstruktion, Basael, Birkhäuser, 1995.

BATTISTA, R. C., 2001, **Dinâmica Estrutural**. Notas de Aula, COPPE/UFRJ/PEC, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

CAVAGNA, G. A., SAIBENE, F. P. & MARGARIA, R. **External Work in Walking**. Journal of Applied Phosiology, Vol. 18, N°1, pp. 1 – 9, January, 1963.

COSTA, D. C., 2012, **Análise do Comportamento Dinâmico de uma Ponte Pedonal**. Dissertação de mestrado, ISEL, Lisboa, Portugal.

DANTAS, R. R., 2017, **Amortecimento de Vibrações em Lajes com Material Viscoelástico**. Dissertação de graduação, UNIT, Aracaju, SE, Brasil.

LAZAN, B. J., 1968. **Damping Materials and Members in Structural Mechanics**. Pergamon Press, 1ª ed, USA.

LENZEN, K. M., 1966. **Vibration of Steel Joist-Concrete Slabs Floors**. Engineering Journal of American Institute of Steel Construction, vol. 3, 2ª ed.

OLIVEIRA, A. T., 2016. **Laje Steel Deck de Concreto Armado Homogeneizado**. Parte I e II. Aracaju, SE, Brasil.

PFEIL, Walter; PFEIL, Michele. **Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático**. 8.ed. Rio de Janeiro. Grupo Gen - LTC, 2009.

QUEIROZ, Gilson; PIMENTA, Roberval José; MARTINS, Alexander Galvão. **Estruturas Mistas Volume I e II**. Rio de Janeiro. IABr/CBCA, 2010.

RAO, Singiresu. **Vibrações Mecânicas**. 4.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

REIHER, H. & MEISTER, F.J., **Die Empfindlichkeit dês Menschen gegen Erschutterungen** (“The Effect of Vibration on People”). Forsch, Ing. – Wes., 1931.

SANTOS, E. F., 2007, **Análise e Redução de Vibrações em Pontes Rodoviárias**. Tese de D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

SORIANO, Humberto Lima. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1.ed. Rio de Janeiro. Elsevier, 2014.

VARELA, W.D., 2004, **Modelo Teórico-Experimental para Análise de Vibrações Induzidas por Pessoas Caminhando Sobre Lajes de Edifícios**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

VASCONCELOS, R. P., 2003, **Controle Dinâmico Estrutural via Mecanismos Viscoelásticos**. Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.